

Le monde est
MATHÉMATIQUE

L'HARMONIE EST NUMÉRIQUE

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES



UNE COLLECTION PRÉSENTÉE PAR **CÉDRIC VILLANI**
MÉDAILLE FIELDS
DIRECTEUR DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

L'HARMONIE
EST NUMÉRIQUE

L'HARMONIE EST NUMÉRIQUE

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES

Javier Arbonés – Pablo Milrud

Le monde est **MATHÉMATIQUE**

UNE COLLECTION PRÉSENTÉE PAR **CÉDRIC VILLANI**,
MÉDAILLE FIELDS 2010, DIRECTEUR DE L'INSTITUT HENRI POINCARÉ

Une édition réalisée avec le soutien de l'IHP

www.ihp.fr



L'Institut Henri Poincaré (IHP) a été créé en 1928 à Paris, à l'initiative de chercheurs français et américains, pour favoriser les échanges intellectuels liés aux mathématiques. Soutenue par le CNRS et l'UPMC, cette "Maison des Mathématiques et de la Physique théorique" est située sur le Campus Pierre et Marie Curie, haut lieu historique de la science, qui participa à la naissance de la physique atomique, à la création du CNRS et à celle du Palais de la Découverte. Dirigé depuis 2009 par Cédric Villani – enseignant-chercheur de l'Université de Lyon –, l'IHP se concentre sur trois missions : l'accueil, chaque année, de centaines de chercheurs de haut niveau, venus du monde entier pour des conférences, cours, séjours de recherche et discussions informelles ; le soutien logistique de la recherche mathématique française ; et enfin, le développement des contacts entre la recherche mathématique et la société : élèves, enseignants, entrepreneurs, artistes, journalistes et tous les publics intéressés par la fascinante aventure des sciences.

et en collaboration avec *Images des Maths*

<http://images.math.cnrs.fr>



Images des Mathématiques veut contribuer à réduire le manque de communication entre les chercheurs en mathématiques et le public.

Images des Mathématiques est une revue en ligne qui a pour but de présenter la recherche mathématique – en particulier française – et le métier de mathématicien, à l'extérieur de la communauté scientifique. Tous les articles sont écrits par des chercheurs en mathématiques et aucun article n'est écrit pour les chercheurs en mathématiques. On espère ainsi montrer les aspects mathématiques de la recherche contemporaine bien sûr, mais aussi ses aspects historiques, culturels et sociologiques. Le site est hébergé par le Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).

Préface

Mathémusique

Par Sylvie Benzoni-Gavage, professeur à l'université Claude Bernard Lyon 1

À l'époque de Pythagore, l'« harmonie du cosmos », les nombres et la musique ne faisaient qu'un. Qu'en est-il de nos jours ? De rares mathématiciens aiment à douter que les mathématiques et la musique aient des liens étroits. Pour autant, ces liens sont multiples et se matérialisent au gré de rencontres régulières entre musiciens et mathématiciens. Des conférences internationales ont d'ailleurs été organisées ces dernières années. En France, le compositeur François Nicolas promeut ces liens, notamment au sein de deux séminaires, le Mamuphi, à l'École Normale Supérieure, et le MaMuX, à l'Institut de Recherche et Coordination Acoustique/Musique. Si « passer par l'acoustique pour circuler de la mathématique vers la musique est la voie la plus fréquentée », rappelle-t-il dans l'une de ses nombreuses contributions à la *Gazette des Mathématiciens*, « passer par la philosophie est la voie royale pour nouer mathématiques et musique », comme c'était le cas dans la Grèce antique. Il poursuit en défendant l'idée qu'« il est possible de nouer musique et mathématiques directement. » Cet ouvrage permettra peut-être au lecteur de l'entrevoir.

De la Grèce antique à nos jours, il y eut un siècle particulièrement marquant, le XVIII^e, où le lien entre mathématiques et musique semblait couler de source. En témoigne le constat fait par le compositeur Rameau en 1722 : « Nonobstant toute l'expérience que je pouvais m'être acquise dans la Musique, pour l'avoir pratiquée pendant une assez longue suite de temps, ce n'est cependant que par le secours des Mathématiques que mes idées se sont débrouillées, et que la lumière y a succédé à une certaine obscurité, dont je ne m'apercevais pas auparavant. » Citons également cette phrase célèbre du mathématicien Leibniz, datant de 1734 : « La musique est une pratique cachée de l'arithmétique, l'esprit n'ayant pas conscience qu'il compte. » Et lorsqu'il parle de compter, il ne s'agit à l'évidence pas seulement de compter les temps. À la suite de Descartes, Galilée et Mersenne, Leibniz adopta en effet une théorie qui expliquait déjà en 1712 les intervalles musicaux en terme de rapports numériques : « même si l'âme n'a pas la sensation qu'elle compte, elle ressent pourtant l'effet

de ce calcul insensible, c'est-à-dire l'agrément qui en résulte dans les consonances, le désagrément dans les dissonances. » De son côté, Léonard Euler, publia en 1739 son *Essai d'une nouvelle théorie de la musique exposée en toute clarté selon les principes de l'harmonie*, qui marqua suffisamment son temps pour, un siècle plus tard, être « traduit, augmenté et mis au courant de la science actuelle par une société de savants. » Au Siècle des lumières, les plus grands scientifiques étaient tout autant mathématiciens que physiciens. C'était le cas d'Euler, mais aussi celui de l'encyclopédiste D'Alembert. En établissant (indépendamment l'un de l'autre et non sans quelques polémiques) l'« équation des cordes vibrantes », ils fournirent la première explication physico-mathématique de la production du son. Ce fut un pas énorme pour décrypter les mystères des cordes pythagoriciennes, même s'il fallut attendre le siècle suivant pour atteindre une meilleure compréhension, grâce à la théorie mathématique des séries de Fourier. Élaborée au départ pour étudier la diffusion de la chaleur, cette théorie s'avéra en effet très efficace pour décomposer les sons : elle se trouve même à l'origine d'une branche très féconde des mathématiques appelée, non par hasard, « analyse harmonique ». Et ce n'est pas seulement une théorie pour la beauté des mathématiques : elle a trouvé au xx^e siècle de nombreuses applications technologiques, la première d'entre elles étant précisément la numérisation du son !

Si ces dernières considérations relèvent surtout du lien entre acoustique et mathématiques, l'ouvrage aborde bien d'autres sujets. En particulier, une grande place est faite aux aspects mathématiques, pour le moins fascinants, de la composition musicale. Ceci devrait ravir les mélomanes curieux comme les amateurs de mathématiques dites « pures », dans lesquelles on range habituellement l'algèbre et la géométrie.

Au lecteur donc, de se plonger dans l'harmonie sous tous ses angles, et de déterminer au final s'il partage la conviction assez largement répandue que mathématiques et musique sont intimement liées, ou s'il pense comme certains qu'elles sont séparées par « une différence irréductible », qui serait « l'émotion »...

Sommaire

Introduction	11
Chapitre 1. En tendant la corde	13
Le monde grec	13
Le système musical pythagoricien	14
Accord absolu	16
Intervalles et accord relatif	18
Pour accorder un piano	22
La gamme pythagoricienne	22
En calculant	24
Le comma pythagoricien	26
Autres accords	27
Échelle diatonique	27
Il faut toujours que ça se complique quelque part...	29
Tout le monde est content	30
Cents	32
Commensurabilité	34
Chapitre 2. L'autre dimension : le temps	39
Groupements rythmiques. Rythme, pulsation, accents	39
De la Grèce aux premières figures proportionnelles	40
Perfectum/imperfectum	42
Percussion : le rythme pur	46
Recouvrir « l'espace » sonore	48
La mesure. Métrique. Subdivisions	52
L'accent et la mesure	52
Types de mesures	52
Irrégularités	54
Rythmes en strates	56
Amalgames	56
La vitesse : le métronome	57
Irrégularités isolées	59

La notation moderne	61
Hors échelle	62
Chapitre 3. La géométrie de la composition	63
Hauteur + rythme : le plan musical	64
Les éléments de l'écriture musicale	64
La portée	64
Les notes	66
Écrire les hauteurs	67
Les clés	67
Faire varier d'un demi-ton	70
La courbe mélodique	70
Transformations géométrico-musicales	71
Transformations isométriques	73
Translations	73
Translation horizontale : la répétition et le canon	74
Translation verticale : la transposition	75
Réflexions	78
Réflexion par rapport à un axe vertical : mouvement rétrograde	79
Réflexion par rapport à un axe horizontal : inversion	80
Rotations	83
Combinaisons	85
Translation horizontale plus translation verticale : le canon à intervalles	85
Translation verticale plus réflexion par rapport à un axe vertical : transposition rétrograde	86
Translation verticale plus réflexion par rapport à un axe horizontal : transposition inversée	86
Transformations homothétiques	90
Homothétie selon l'axe horizontal	91
Le <i>Requiem allemand</i> de Johannes Brahms	92
« Puttin' on the Ritz »	92
Homothétie selon l'axe vertical	93
Symétries harmoniques	94
Accords symétriques	94
Gammes symétriques	95

La mathématique de la forme musicale	97
ABCDE...	98
<i>La Messe en Si mineur</i> de Bach	99
Le nombre d'or en musique	101
 Chapitre 4. Ondes et bits	105
La physique du son	105
Ton pur et ton réel	109
Superpositions d'ondes	111
La fonction des harmoniques	112
Synthèse acoustique	113
Audio numérique	114
Numérisation du son	115
Retour à l'analogique	116
Compression	118
Signal audio à l'état brut	118
Compression audio	118
Méthodes de compression	119
MIDI	120
L'orchestre	122
Quantification	122
 Chapitre 5. Mathématique de la composition	123
Égalitarisme tonal : le dodécaphonisme	123
Qu'est-ce que le dodécaphonisme ?	124
Séries	125
Forme numérique et forme matricielle	127
Forme circulaire	129
Alban Berg	132
Sérialisme, contrôle et chaos	133
Musique stochastique	135
Une partie de dés avec Mozart	136
Combien d'œuvres possibles ?	137
Copier les maîtres	138
L'anniversaire de Markov	139
Le deuxième anniversaire	141

SOMMAIRE

Le logiciel EMI	142
Automatiser la composition	142
L'inspiration	143
Composition algorithmique	144
 Annexe I. Concepts de base de l'écriture et de la théorie musicales	 145
 Annexe II. Retour sur le rôle du temps en musique	 157
 Bibliographie	 159
 Index analytique	 160

Introduction

*La musique est le plaisir que ressent l'esprit humain
de compter sans s'apercevoir qu'il compte.*

Gottfried Wilhelm von Leibniz

À l'aube du xxi^{e} siècle, le panorama musical du monde est fantastique. Varié. Les mathématiques, l'électronique, les bits et les mégaoctets semblent disposés à partager leur vie avec la musique, l'accompagnant vers de nouveaux horizons. Était-il moins varié et fantastique aux débuts du xx^{e} siècle ? Et au x^{e} ? Et mille ans avant Jésus-Christ ? Les sons étaient-ils déjà analysés mathématiquement dans l'Antiquité ? La technologie du xix^{e} a-t-elle influencé la musique ?

Présente de toutes parts tant sur le plan géographique qu'historique, la musique est l'une des principales manifestations culturelles de l'humanité. Toujours et en tout lieu, elle est là pour émouvoir et distraire. Les mathématiques, quant à elles, analysent le phénomène et apportent leur potentiel à une infinité de domaines du travail musical : rapports entre les sons d'un accord, phénomènes de résonnance, clés secrètes de la partition, jeux musicaux ou structures géométriques. Au plaisir et à l'émotion, les auditeurs qui savent s'amuser avec les mathématiques peuvent ainsi ajouter la fascination et l'étonnement pour l'ingrédient mathématique.

Nous allons voir comment Mozart décrit une méthode pour composer en se servant de dés, ainsi que des œuvres que l'on ne peut interpréter sans avoir résolu une énigme. Le hasard, les fractales et le nombre d'or ont aussi leur place dans la portée. Pourquoi y a-t-il des sons dissonants et des sons harmonieux ? Pourquoi peut-on distinguer un violon d'une trompette ? Une cantatrice peut-elle, de sa voix, briser un verre en cristal ? Qu'apporte la technologie à la musique ? Comment la notation musicale moderne a-t-elle pris forme et à quelles règles obéit-elle ?

Même si, entre autres interrogations, celles-ci sont imprégnées des mathématiques les plus diverses, il est important de souligner que la science ne conditionne pas le phénomène musical. Cela dit, nous disposons d'un vaste éventail d'instruments pour la création, que nous explorons aussi en détail dans le présent ouvrage. Quoi qu'il en soit, avec les outils mathématiques ou sans eux, la clé de toute œuvre musicale demeure dans l'inspiration et l'art du compositeur. Et là réside, en fin de compte, la valeur que les mathématiques apportent à l'étude de la musique : la possibilité

de contempler et d'admirer une forme artistique depuis les coulisses, une nouvelle perspective pour découvrir d'un regard neuf ce que nous pensions connaître.

Chapitre 1

En tendant la corde

*Après le silence, ce qui tend le plus
à exprimer l'inexprimable est la musique.*

Aldous Huxley

Le fait musical est éphémère et son existence se situe dans la mémoire. Il se produit dans le temps et est apparemment insaisissable. Ces caractéristiques dotent la musique d'une aura magique qui a poussé l'homme à l'employer pour ses rituels depuis l'aube des temps et en a fait un véhicule privilégié d'adoration à la divinité. Les découvertes anthropologiques révèlent la présence d'instruments de musique, d'un bout à l'autre du globe, dès la Préhistoire : les instruments à percussions et les tambourins sont très nombreux, mais on a aussi découvert des flûtes et des trompettes primitives qui prouvent la présence de la mélodie dans l'élaboration musicale des cultures les plus anciennes.

Le monde grec

Le mot « musique » tire son origine du terme grec *musikè*, littéralement « l'art des muses ». Dans la mythologie grecque, les Muses étaient des déesses inspiratrices de la musique, de la danse, de l'astronomie et de la poésie.

L'école pythagoricienne, active à partir du VI^e siècle av. J.-C., tentait de comprendre l'harmonie de l'univers, et ses philosophes considéraient les nombres et leurs rapports comme l'expression ultime de cette harmonie. Par leur intermédiaire, ils dessinèrent des modèles astronomiques, acoustiques et musicaux, au point que musique et arithmétique étaient étudiées ensemble. Ils croyaient que les mouvements des planètes à travers l'espace engendraient des vibrations harmoniques, imperceptibles pour les humains : la « musique des sphères ».

Les civilisations grecque et romaine, dans leur ensemble, cultivaient la connaissance théorique comme un savoir séparé des activités manuelles, dites « arts mineurs ». Les disciplines supérieures étaient réparties en deux grands groupes : le premier, nommé *trivium* (de *tri*, « trois » et *vium*, « voie » ou « chemin »), était formé

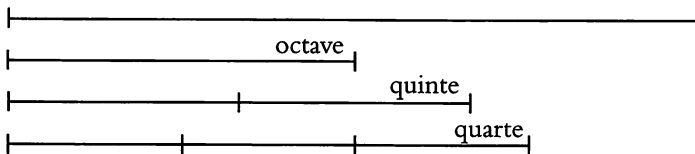
par la grammaire, la dialectique et la rhétorique ; le second, appelé *quadrivium* (de *quadri*, « quatre ») était composé de l'arithmétique, la géométrie, l'astronomie et la musique. Ces sept voies, les « sept arts libéraux », permettaient à l'homme de rester en équilibre avec un univers en harmonie.

Le système musical pythagoricien

Les études de l'école pythagoricienne dans le domaine de la musique naquirent sur la base des sons produits en jouant de l'unique corde d'un instrument monocorde. La longueur de cette corde était modifiée de manière très semblable à celle dont on presse la corde d'une guitare moderne. En changeant la longueur de la corde, cela créait différentes notes de musique. Plus la corde était courte, plus la note obtenue était « haute » ou aiguë. Méthodiquement, les pythagoriciens comparèrent par paires les sons produits par différentes longueurs de corde. Leurs expériences avaient trait aux rapports de longueurs exprimés par de petits nombres : en divisant la corde au milieu, au tiers, aux deux tiers de la longueur d'origine, etc.

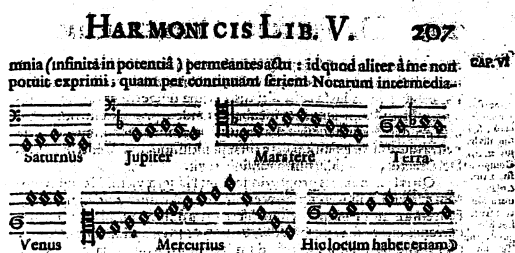
Les résultats furent surprenants : les sons provoqués par des cordes longues en rapport avec de petits nombres généraient les sons les plus agréables à l'oreille, c'est-à-dire les plus harmonieux. Grâce à ces observations, les pythagoriciens parvinrent à établir le modèle mathématique d'un phénomène physique, sans perdre de vue sa dimension esthétique, au même titre que ce qui se produirait avec le nombre d'or ou le concept de beauté à la Renaissance.

Le rapport le plus basique est celui qui s'obtient en pressant la corde au milieu de sa longueur. Ce rapport s'exprime numériquement 2:1, et musicalement, il correspond à un intervalle d'une octave (par exemple, la distance existante entre un *do* et le *do* suivant). Le rapport suivant parmi les plus simples est celui où la corde est pressée en un point situé à un tiers de sa longueur totale ; l'expression numérique de ce rapport est 3:2, qui correspond musicalement à un intervalle d'une quinte (la distance *do-sol*). Nous avons ensuite celle où l'on presse la corde à un quart du total, ce qui s'exprime numériquement par le rapport 4:3, tandis que, sur le plan musical, il correspond à un intervalle d'une quarte (la distance *do-fa*).



SONS PLANÉTAIRES

La notion d'un cosmos en équilibre fut l'un des aspects de la culture antique que l'humanisme de la Renaissance prétendit se réapproprier. Une expression de cet équilibre, défendue par les pythagoriciens et explorée également par Platon et Aristote, était connue sous le nom de « musique des sphères ». Ils croyaient, autrement dit, que les planètes produisaient des sons, inaudibles aux humains, en raison de leur position et de leur mouvement, et que ces sons étaient consonants, à savoir harmonieux. L'Allemand Johannes Kepler (1571-1630) avait étudié la religion, l'éthique, la dialectique, la rhétorique, ainsi que la physique et l'astronomie. Il avait eu accès à la théorie de l'héliocentrisme et était pétri des héritages pythagoriciens et de Platon. Or au début du ^{xvi}^e siècle, jusque et y compris dans les milieux scientifiques, le mouvement des planètes était un mystère qui ne trouvait de réponse que dans la volonté de Dieu. Kepler fit la lumière sur ce mystère et les lois des mouvements planétaires établies par lui comptent encore parmi les grandes découvertes scientifiques de l'histoire. Mais ses théories allaient plus loin et reprenaient la vision de l'harmonie des sphères postulée par le monde antique. Ainsi, dans son œuvre *Harmonices Mundi* (*L'Harmonie des mondes*) de 1619, Kepler exposa, conjointement à ses études astronomiques, la thèse selon laquelle chaque planète émet un son déterminé par sa vitesse angulaire lors de sa course autour du soleil. Les extrêmes de cette vitesse angulaire sont situés à la périhélie (le point le plus proche du soleil) et à l'aphélie (le point le plus éloigné du soleil) de sa trajectoire elliptique. Kepler compara les sons à un extrême et à l'autre pour une même planète, ainsi qu'entre des planètes voisines. Il parvint à établir des gammes et des accords associés à chacune d'entre elles. D'après ses calculs, les mélodies de Vénus et de la Terre variaient d'un intervalle d'un demi-ton ou moins ; à l'autre extrême, Mercure élargissait son intervalle maximal au-delà d'une octave. La religiosité de Kepler lui fit soutenir que les planètes avaient très rarement résonné en harmonie ; probablement, croyait-il, juste au moment de la création.



Reproduction des *Harmonices Mundi* de Kepler montrant les prétendus sons produits par les planètes.

PYTHAGORE DE SAMOS (582-496 AV. J.-C.)

Pythagore naquit sur l'île grecque de Samos. Inspiré par le philosophe et mathématicien Thalès de Milet, il entreprit un long voyage d'apprentissage à travers l'Égypte et la Mésopotamie. L'expérience vécue et les idées que ce périple éveilla chez lui le poussèrent à fonder une école de pensée où cohabitaient différentes disciplines scientifiques, esthétiques et philosophiques. Pythagore et ses successeurs réalisèrent d'importantes recherches dans des domaines aussi éclectiques que l'acoustique et la musique, l'arithmétique, la géométrie et l'astronomie. Le prestige de Pythagore et de son école était tel qu'on lui attribue historiquement la paternité de l'un des théorèmes fondamentaux de la géométrie, le théorème de Pythagore, même si celui-ci était déjà connu depuis plusieurs siècles par les principales civilisations orientales de l'Antiquité. Si l'on résume le théorème de Pythagore au moyen de la formule

$$a^2 + b^2 = c^2$$

on obtient une équation aux solutions entières infinies. Chaque ensemble de solutions reçoit le nom de « triplet pythagoricien ». Tout ensemble de trois éléments qui déterminent un triplet pythagoricien dessine une équerre, instrument employé par les agriculteurs et les artisans pour tracer des angles droits.

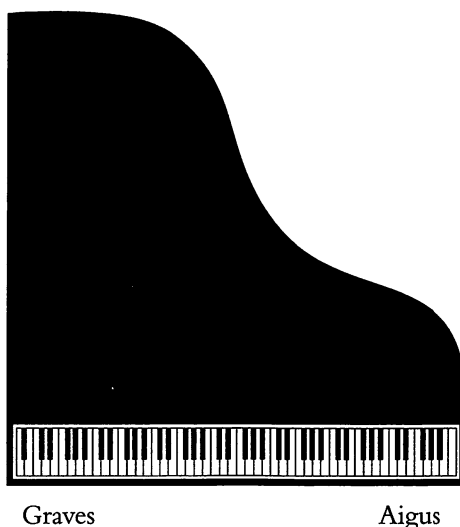
Nous assistons ici à l'émergence d'un modèle selon lequel les intervalles de sons reliés par des fractions de forme

$$\frac{n+1}{n}$$

sont harmoniques et agréables. Cela fut interprété par les pythagoriciens comme une confirmation du rapport direct entre le nombre et l'harmonie, le beau.

Accord absolu

Pour mieux apprécier la puissance des découvertes pythagoriciennes, il faut faire une distinction entre deux concepts clés : l'accord « absolu » et l'accord « relatif ». Chaque note de musique a une hauteur qui permet de l'identifier comme plus grave ou plus aiguë. La hauteur d'une note est déterminée par la fréquence d'oscillation de son onde sonore (nous traiterons cela plus loin). Plus les fréquences sont élevées, plus les sons sont aigus. (Dans l'annexe I, nous proposons une explication détaillée de ces concepts musicaux)



Sur un piano les touches correspondant aux notes les plus graves sont à gauche, tandis que les plus aiguës se trouvent à droite.

VERRES QUI EXPLOSENT ET PONTS QUI S'EFFONDRENT

Dans de nombreux films ou dessins animés, on voit une cantatrice qui, en émettant un son très aigu, parvient à briser un verre en cristal. Or il s'agit d'un fait physique non pas fictif, mais bien réel. Les corps rigides peuvent vibrer à une fréquence déterminée qui les caractérise et qui dépend du matériau dont ils sont constitués, de leur forme ainsi que d'autres particularités. Il faut en plus tenir compte de la source sonore qui génère un son arrivant à l'objet sous forme d'ondes fluctuantes de pression d'air le faisant vibrer. Il existe une situation particulière qui se crée lorsque la fréquence du son émis est la même que celle de l'objet : ce dernier commence à vibrer avec plus d'intensité et il se produit ce qu'on appelle une « résonance ». Si l'on ajoute au phénomène de résonance une augmentation de l'énergie (du volume) de la source sonore, l'amplitude des vibrations du corps augmentera d'autant plus. Dans le cas d'une corde, la flexibilité caractéristique du matériau lui permettra de supporter ces va-et-vient. En revanche, s'il s'agit d'un corps très rigide, il ne pourra pas absorber les vibrations et finira par se casser. C'est ce qui se passe avec le verre en cristal. Le cas du Tacoma Narrows est célèbre : ce pont suspendu, le 7 novembre 1940, quelques mois après son inauguration, s'effondra dans les eaux de l'estuaire de Puget, dans l'état de Washington, en raison des oscillations dues au vent, phénomène connu sous le nom de « flambage ».

L'oreille humaine est capable de percevoir des vibrations à des fréquences comprises entre 20 et 20 000 hertz (Hz) ou cycles par seconde. En dessous de ce niveau de fréquences, se trouvent les infrasons et au-dessus, les ultrasons. La fréquence de chaque note est une valeur absolue qui l'identifie de manière catégorique. On sait que « *la* s'accorde en 440 Hz », mais il faut prendre ce constat avec précaution : le son dont la fréquence est de 440 Hz est une chose, le nom que l'on attribue à ce son en est une autre. En ce sens, il est aussi arbitraire que le mètre étalon qui régit le système métrique décimal et son instauration suit un processus similaire. En 1939, la deuxième conférence internationale pour le diapason, réunie à Londres, institua le diapason normal *la*, dit aussi ton de référence, à 440 Hz. Auparavant, cette valeur n'était pas unifiée et changeait en fonction des époques, des lieux, ainsi que des divers luthiers. Actuellement encore, certains orchestres préfèrent fixer leur *la* sur d'autres fréquences, arrivant parfois à 444 Hz voire plus.

PROBLÈMES AVEC LE PREMIER

Durant les premières années du ^{xx}e siècle, le standard initial pour le diapason normal était de 439 Hz. Pourquoi a-t-on abouti à 440 Hz ? Selon l'hypothèse d'un membre de l'Institut britannique des normalisations, « le ton d'accord que donnait la BBC part d'un oscillateur contrôlé par un cristal piézoélectrique qui vibre à une fréquence d'un million de hertz. On réduit la fréquence à 1 000 Hz avec des diviseurs électroniques, puis on multiplie par 11 et on divise par 25 de manière à produire la fréquence voulue de 440 Hz. Comme 439 est un nombre premier, une fréquence de cette valeur ne pouvait être obtenue par de tels moyens. »

Intervalles et accord relatif

Avant d'aborder la notion d'accord relatif, nous devons nous familiariser avec celle d'« intervalle ». Comme nous venons de le voir, chaque note a sa propre fréquence qui l'identifie par rapport à toutes les autres. Les pythagoriciens, néanmoins, n'analysèrent pas chaque note séparément, mais par le biais des rapports existant entre ces dernières. Deux notes quelles qu'elles soient sont séparées par une distance appelée « intervalle ». Il faut à nouveau distinguer deux des différentes façons d'aborder ce concept. L'une d'elles est de prendre les intervalles comme la distance musicale qu'il y a entre deux notes. Chaque intervalle est défini par la quantité de notes par lesquelles il faut passer pour arriver de l'une à l'autre, et par le sens du parcours. Pour aller de *do* à *fa*, on passe par quatre notes : *do-ré-mi-fa*. L'intervalle

do-fa est dit « de quarte » ou tout simplement « une quarte ». Une octave, intervalle que l'on connaît déjà, suit ce même critère : pour aller d'un *do* au *do* suivant, on passe par huit notes : *do-ré-mi-fa-sol-la-si-do*. Les intervalles cités jusqu'à présent sont ascendants. Les descendants sont obtenus en commençant par la note la plus aiguë et en comptant en sens inverse : un intervalle *do-la* est une tierce qui s'entend de manière descendante : *do-si-la* (la classification des intervalles, un peu plus complexe, est expliquée dans l'annexe I).

L'autre façon de concevoir les intervalles est numérique et se fait par la comparaison proportionnelle des fréquences de chaque note. Deux notes ont entre elles un accord relatif, de sorte que ce qui importe n'est pas la fréquence absolue de chacune, mais la proportion numérique entre les fréquences de deux notes différentes.

Cela permet de comparer deux notes en se référant à l'intervalle qui les sépare par le biais du rapport numérique reliant leurs fréquences. Par exemple, si nous jouons deux notes à un intervalle d'une quarte, la plus aiguë aura une fréquence égale aux $4/3$ de la fréquence de la plus grave. S'il y a une quinte entre les deux sons, le rapport entre leurs fréquences sera de $3/2$. Par exemple, à partir d'un *la* de 440 Hz, le *mi* qui se trouve une quinte plus haut s'accordera en 660 Hz.

CROISSANCE LINÉAIRE CONTRE CROISSANCE EXPONENTIELLE

Pour nommer un intervalle, on compte la quantité de notes intermédiaires entre les deux notes choisies, y compris ces deux dernières. La somme de ces intervalles est donc une opération contre-intuitive. Combien font une seconde et une tierce ? Font-elles une quinte ? Il suffit de faire quelques calculs pour s'apercevoir que ce n'est pas le cas. Prenons un *do* comme début de la somme. En ajoutant une seconde, on passe de *do* à *ré*. En ajoutant une tierce, on passe de *ré* à *fa*. La somme n'est donc pas une quinte, mais une quarte.

La somme des intervalles suit une certaine linéarité. Si l'on numérote les touches d'un piano en commençant par 1 pour la plus grave jusqu'à 88 pour le *do* le plus aigu, on verra que les *do* ont les numéros 1, 8, 15, 22, 29... C'est-à-dire que, pour passer d'un *la* au suivant, il faut monter d'une quantité fixe de sept touches. Néanmoins, lorsqu'on ne prend pas en compte la touche, mais les fréquences absolues correspondant à ces notes, on voit que la croissance n'est pas linéaire, mais exponentielle. Le *la* le plus grave du piano s'accorde en 27,5 Hz. Pour passer au *la* suivant, la fréquence ne doit pas monter d'une quantité fixe mais doit être multipliée par 2, de façon à ce que le *la* suivant s'accorde en 55 Hz, le suivant en 110 Hz, et ainsi de suite.

Le rapport entre les longueurs de deux cordes est l'inverse du rapport des fréquences de ces cordes. Par exemple, deux cordes donnent une note à la quinte, ou $3/2$, si leurs longueurs sont en rapport $2/3$. Nous allons désormais abandonner toute référence aux longueurs de cordes et nous ne travaillerons plus qu'avec deux fréquences.

LA MALÉDICTION DE L'OREILLE ABSOLUE

L'oreille absolue est une faculté qui permet à celui qui la possède d'identifier le nom des notes qu'il écoute, sans avoir besoin d'aucune autre référence : quelqu'un enfonce n'importe quelle touche d'un piano et une personne avec l'oreille absolue sait de quelle note il s'agit. Il n'existe pas de rapport direct entre avoir l'oreille absolue et un éventuel talent musical. En fait, nombre de musiciens sont occasionnellement gênés par leur oreille absolue. Dans le milieu de la musique chorale, notamment, il est très fréquent de transposer les partitions pour les adapter au ton qui convient le mieux au chœur. Cela se fait en commençant par exemple un chant un demi-ton en dessous de ce qu'indique la partition, mais en lisant cette dernière. Alors les notes chantées ne correspondent pas aux notes lues, ce qui cause souvent un conflit avec celui qui possède l'oreille absolue, pour qui il n'est pas simple de gérer la différence entre ce qu'il lit et ce qu'il entend.



Ainsi, deux notes dont les fréquences sont 440 Hz et 880 Hz se trouvent en parfait rapport d'octave, et leur accord correspond au *la* officiel. Deux notes dont les fréquences sont 442 Hz et 884 Hz sont aussi parfaitement accordées dans un rapport d'une octave, bien que leur accord ne corresponde pas au *la* officiel de 440 Hz. Enfin, deux notes dont les fréquences sont 443 Hz et 887 Hz ne sont pas accordées en un parfait rapport d'octave, même si, à l'oreille, leur rapport se reconnaît pleinement comme « d'octave non accordée ».

Le lien proportionnel entre les fréquences de deux notes permet, à partir d'un son connu, d'en calculer un autre situé à la distance de l'intervalle que l'on désire, en multipliant le premier par le facteur correspondant. Étant donné une fréquence F_1 , ce rapport permet de calculer la fréquence F_2 qui se trouve une quarte au-dessus, à savoir à $4/3$, de la manière suivante :

$$F_2 = F_1 \times \left(\frac{4}{3} \right).$$

Ce calcul peut s'enchaîner plusieurs fois en multipliant les facteurs correspondants. Par exemple, si F_3 est à la tierce majeure supérieure (qui entraînera un rapport de fréquence de $5/4$), il est possible de calculer le rapport entre F_3 et F_1 en réalisant les substitutions suivantes :

$$F_3 = F_2 \times \left(\frac{5}{4} \right) = \left[F_1 \times \left(\frac{4}{3} \right) \right] \times \left(\frac{5}{4} \right) = F_1 \times \left[\left(\frac{4}{3} \right) \times \left(\frac{5}{4} \right) \right] = F_1 \times \left(\frac{5}{3} \right).$$

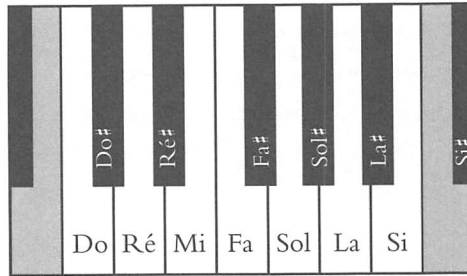
Ces calculs peuvent aussi se faire en sens inverse, en divisant au lieu de multiplier. Par exemple la fréquence F_4 , qui est une quinte en-dessous de F_1 , se calcule ainsi :

$$F_4 = \frac{F_1}{(3/2)}.$$

Ces deux manières de concevoir les intervalles, c'est-à-dire sous forme musicale et numérique, sont intimement liées. Par la suite, nous utiliserons l'une ou l'autre selon nos besoins.

Pour accorder un piano

Il nous faut à présent nous atteler à la tâche de déterminer l'accord des douze notes d'une octave d'un piano.



Pour cela, nous prendrons en compte le procédé dit « de réduction à l'octave » : une fois déterminé l'accord d'un *ré*, nous le transposons à tous les *ré* du piano, en multipliant ou en divisant sa fréquence par 2. Nous ferons de même avec toutes les autres notes.

Le *do* aura une valeur initiale normalisée de 1. De là, à chacune des notes correspondra une valeur entre 1 (ce *do*) et 2 (le *do* suivant), qui correspondra à la fréquence de la note proportionnelle à $do = 1$. Nous aurons terminé dès que nous aurons déterminé les valeurs de toutes les autres notes. Tous les calculs peuvent être appliqués à partir de n'importe quelle autre valeur initiale (par exemple, à partir d'un *la* de 440 Hz).

Les douze notes indiquent que, pour arriver d'un *do* au suivant, il faudra douze phases. On donne à chacune d'elles le nom de « demi-ton ». Nous aborderons le problème en citant tout d'abord les découvertes faites par les pythagoriciens, suivant la méthode qu'ils utilisaient pour accorder les instruments de leur époque.

La gamme pythagoricienne

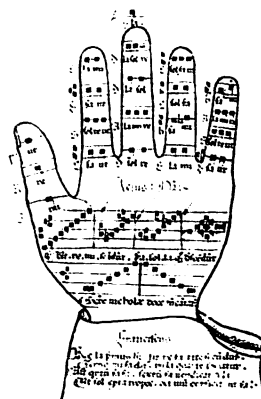
Les pythagoriciens organisèrent leurs gammes en se basant sur de simples rapports numériques entre les différents sons. Ainsi, la gamme pythagoricienne se structure sur deux intervalles : l'octave, qui présente un rapport de fréquences entre les notes de $2/1$, et la quinte, avec un rapport de fréquences $3/2$. Les pythagoriciens obtinrent divers sons de la gamme en enchaînant les quintes, faisant donc appel à « la réduction à l'octave » pour situer ces notes au rang souhaité.

LE NOM DES NOTES

Les Grecs nommèrent les notes suivant les premières lettres de l'alphabet ionien, assignant des lettres différentes à un même son altéré en demi-ton ou doublement ascendant. Par exemple, si le *fa* était alpha, beta était *fa dièse*, et gamma, *fa double dièse*. Pour eux, la gamme s'organisait de manière descendante, contrairement à la façon dont on l'appréhende aujourd'hui. Les Romains utilisaient aussi les premières lettres de l'alphabet pour nommer les sons de leur gamme. Boèce, un philosophe qui écrivit au ^{ve} siècle ap. J.-C. un traité en cinq volumes sur la théorie de la musique, considéra une gamme de quinze notes qui embrassait deux octaves. Boèce désigna chacune de ces notes par une lettre différente, ignorant le concept cyclique d'octaves. L'étape suivante dans l'histoire du nom des notes fut, justement, de comprendre ce concept cyclique et de désigner d'une même lettre les notes semblables d'octaves différentes. Ainsi, la nomenclature dite allemande ou anglaise désignait les sept notes de l'octave principale par des lettres de A à G en majuscules ; l'octave suivante, de « a » à « g » en minuscules, et la troisième, par des doubles lettres minuscules (aa, bb, cc, dd, ee, ff, gg). Sept des douze sons, ceux qui correspondaient aux touches blanches du piano, reçurent donc un nom précis. Les cinq autres sons (les touches noires) furent nommés ultérieurement, après l'apparition des concepts de bémol, bécarré et dièse. Ces noms ne furent pas spécifiques mais dérivés des sept basiques. Au ^{xi}e siècle, le moine toscan Guido d'Arezzo (env. 995-env. 1050) consacra une bonne partie de ses études musicales à concevoir des moyens mnémotechniques pour les interprètes. Le plus connu est probablement la « main guidonienne » qui rangeait les notes dans leur notation alphabétique suivant un parcours de la main. Guido d'Arezzo rebaptisa aussi ces dernières, assignant à chaque son la première syllabe des vers d'un hymne à saint Jean alors très en vogue :

Ut queant laxis,
resonare fibris,
Mira gestorum,
famuli tuorum,
Solve polluti,
Labii reatum,
Sancte Iohannes.

Après avoir changé le *ut* en *do*, cela donna les noms des sept notes de la gamme telle que l'emploient, entre autres, les Italiens, les Français ou les Espagnols.



*Main guidonienne extraite
d'un manuscrit médiéval.*

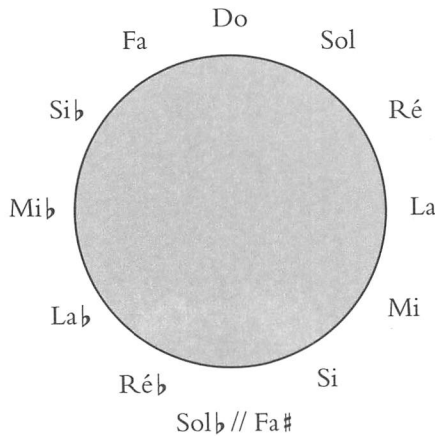
Prenons le *do* comme exemple. On calcule d'abord le rapport de la première quinte ascendante pour obtenir le *sol*. Un nouvel enchaînement nous mène à un *ré*, pour continuer par un *la*, un *mi* et enfin un *si*. En prenant alors une quinte descendante depuis le *do* initial, on obtient le *fa*. Nous avons ainsi les sept sons de la gamme :

$$fa \leftarrow do \rightarrow sol \rightarrow ré \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si$$

Si l'on poursuit par l'enchaînement des quintes, on peut atteindre les douze sons de « l'échelle chromatique », qui forme ce que l'on nomme le « cercle de quintes » :

$$sol \flat \leftarrow ré \flat \leftarrow la \flat \leftarrow mi \flat \leftarrow si \flat \leftarrow fa \leftarrow do \rightarrow sol \rightarrow ré \rightarrow la \rightarrow mi \rightarrow si \rightarrow fa \sharp$$

où les symboles *bémol* ($\flat$) et *dièse* ($\sharp$) désignent des ajustements d'un demi-ton respectivement inférieur et supérieur.



Une fois les douze notes obtenues au moyen d'enchaînements successifs de quintes, il suffira alors de situer les sons de la même gamme au niveau d'une seule octave grâce au procédé de réduction à l'octave.

En calculant

Nous allons à présent déterminer l'accord de chaque note par enchaînements de quintes et « réductions à l'octave » (c'est-à-dire en divisant ou en multipliant par 2), de sorte que, rappelons-le, la valeur de leurs fréquences relatives se trouve toujours

entre 1 (le rapport qui concerne le *do* lui-même) et 2 (le rapport qu'entretient le *do* avec le *do* de la gamme suivante).

On détermine d'abord le *sol*, qui est à une quinte du *do* :

$$\text{sol} = \frac{3}{2}.$$

Puis le *ré*, à une quinte du *sol* (en multipliant par 3/2) mais il faut « réduire d'une octave » (en multipliant par 1/2) :

$$\text{ré} = \text{sol} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

La distance de *do* à *ré* s'appelle un « ton », et, comme on peut s'y attendre, elle équivaut à deux demi-tons.

Ensuite le *la*, à une quinte du *ré* :

$$\text{la} = \text{ré} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8} \times \frac{3}{2} = \frac{27}{16}.$$

Le *mi*, à une quinte du *la*, mais il faut réduire d'une octave :

$$\text{mi} = \text{la} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{27}{16} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{81}{64}.$$

La gamme est complétée par le *si*, à une quinte du *mi*, et le *fa*, une quinte sous le *do* et en montant d'une octave (en multipliant par 2).

En résumé, et en prenant le *do* avec une valeur normalisée à 1 :

Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Rapport de fréquences	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2

Ce procédé peut se poursuivre pour déterminer les accords des touches noires ou bémols, en descendant par quintes depuis le *fa* :

Note	Ré _b	Mi _b	Sol _b	La _b	Si _b
Rapport de fréquences	256/243	32/27	1024/729	128/81	16/9

Le comma pythagorien

En montant une quinte de *si*, on arrive au *fa*♯, qui devrait être le même son que le *sol*♭, en atteignant l'autre extrême, après avoir fait les réductions à l'octave correspondantes. Mais ces deux sons ne sont pas exactement identiques : la différence entre le *fa*♯ et le *sol*♭ se nomme « comma pythagorien ». De la même manière, après avoir fait les réductions à l'octave correspondantes, les sons terminaux *fa*♯-*ré*♭ ne se trouvent pas à la distance d'une quinte juste, mais ils forment un intervalle qui diffère de celle-ci par un comma pythagorien. Cette quinte légèrement plus petite s'appelle « quinte du loup ».

L'assemblage du cycle des quintes comprend l'enchaînement de douze quintes pour arriver à une note qui est « presque » la même que celle du début, mais à une distance de sept octaves :



Le comma pythagorien est ce « presque ». On peut calculer sa valeur (appelons-la CP) en partant d'une fréquence f et en comparant l'enchaînement de douze quintes, depuis f , avec l'enchaînement de sept octaves :

$$CP = \frac{f \times \left(\frac{3}{2}\right)^{12}}{f \times 2^7} = 1,013643265.$$

La différence est alors d'un peu plus de 1 % d'une octave ou équivaut presque à un quart de demi-ton. Cette différence est due au fait que le calcul de la fraction qui définit la quinte est incompatible avec l'octave, comme on le voit aisément. Pour cela, voyons s'il existe deux exposants quels qu'ils soient, p et q , qui nous permettent de « marier » les deux fractions :

$$\left(\frac{3}{2}\right)^p = 2^q$$

donc $\frac{3^p}{2^p} = 2^q$

donc $3^p = 2^q \times 2^p$

donc $3^p = 2^{q+p}.$

On déduit de la dernière expression qu'on pourrait aussi bien trouver un nombre qui soit à la fois puissance de 2 et de 3. Néanmoins, et vu que 2 comme 3 sont des nombres premiers, cela contredirait le théorème fondamental de l'arithmétique, selon lequel tout entier positif a une seule représentation comme produit de nombres premiers. Ce théorème, postulé par Euclide, fut complètement démontré pour la première fois par Carl Friedrich Gauss. Il s'ensuit que les intervalles de quintes et d'octaves définis par les pythagoriciens n'iront jamais de pair, ou, ce qui revient au même, qu'il n'y a pas d'échelle chromatique sans comma pythagoricien pour inévitable acolyte.

Autres accords

Tant la voix humaine que les instruments à cordes sans positions fixes (sans frettes) peuvent donner un « accord naturel », à savoir celui qui produit la meilleure consonance entre ses notes, la plus belle harmonie. Dans les deux cas, en effet, ils permettent de modifier subtilement la hauteur des sons émis (« corriger l'accord ») pour atteindre la plus grande consonance. Comme nous l'avons vu, l'échelle pythagoricienne se construit à partir d'une note principale depuis laquelle les autres sont déterminées par des enchaînements successifs de quintes « pures ». Cela entraîne toutefois quelques inconvénients « arithmétiques » dans la recherche d'une bonne consonance : le premier, dérivé de l'incompatibilité des intervalles d'octave et de quinte, débouche sur la fameuse quinte du loup ; le deuxième surgit à cause d'une autre incompatibilité, cette fois des quintes avec les tierces majeures.

Dans la gamme pythagoricienne, l'accord des tierces s'obtient par un enchaînement de quatre intervalles de quinte, ce qui, en réduisant à l'octave, se traduit numériquement par un ratio de fréquences 81:64. Il existe cependant une autre façon de déterminer l'accord d'une tierce, en suivant le simple rapport 5/4 ou, ce qui revient au même, 80:64. Ce sont des tierces « pures ».

On peut en déduire que la gamme pythagoricienne, en optant pour l'accord par enchaînement de quintes, néglige la pureté des tierces. Sur les touches blanches d'un piano se trouvent trois de ces tierces : *do-mi*, *fa-la* et *sol-si*. On pourrait dire que la gamme pythagoricienne préfère avoir de bonnes quintes, quitte à ce que les tierces ne soient pas « pures ».

Échelle diatonique

La recherche d'un accord naturel « pur » a conduit à une nouvelle façon d'organiser les sons et leurs rapports, dite « échelle ou gamme diatonique ». Alors que la gamme

pythagoricienne calcule tous ses intervalles uniquement au moyen d'enchaînements de quintes, l'échelle diatonique a une organisation plus complexe.

En partant du *do*, elle respecte les intervalles de quinte pour calculer les deux notes suivantes qu'elle considère comme les plus importantes de la gamme : *fa* et *sol*. Ensuite, elle calcule *mi*, *la* et *si* comme des tierces pures respectivement de *do*, *fa* et *sol*.

L'échelle est complétée par le *ré* accordé comme une quinte juste à partir du *sol* :

Fa	←	Do	→	Sol	→	Ré
↓		↓		↓		
La		Mi		Si		

Les intervalles de l'échelle diatonique sont plus « purs », donc acoustiquement plus stables. Cela apparaît aussi dans la simplicité plus grande des rapports entre fréquences que décrivent les intervalles qui la composent. En premier lieu, et toujours à partir d'un *do* normalisé de valeur 1, on calcule *fa* et *sol* à une quinte pure du *do* : le *fa* s'accorde en $4/3$, et le *sol* en $3/2$. À partir du *do*, on calcule sur une tierce, *mi*, à une distance de $5/4$.

Le même calcul est réalisé pour trouver le *la* comme tierce de *fa* :

$$la = fa \times \frac{5}{4} = \frac{4}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{5}{3}.$$

Encore une fois pour trouver le *si* comme tierce du *sol* :

$$si = sol \times \frac{5}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{5}{4} = \frac{15}{8}.$$

Et enfin, on calcule le *ré* à une quinte pure du *sol*, en réduisant à une octave :

$$ré = sol \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{9}{8}.$$

Note	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Rapport de fréquences	1	$9/8$	$5/4$	$4/3$	$3/2$	$5/3$	$15/8$	2

La séquence par laquelle ont été définis les intervalles de la gamme diatonique suit la structure de la « musique tonale ». L'immense majorité de la musique des siècles derniers s'inscrit dans la musique tonale, depuis les périodes baroques et classiques jusqu'au rock et à la musique pop, en passant par les folklores occidentaux.

Dans la musique tonale, les notes s'organisent hiérarchiquement autour d'une note principale, dite tonique, ou centre tonal. Chaque note a une « fonction » musicale dans l'organisation, établissant entre les différentes notes un jeu de tensions qui génère le développement du processus musical. Cette fonctionnalité fait que quelques intervalles (et en particulier les bémols et les dièses, donc les touches noires) doivent être accordés de manière différente suivant le contexte dans lequel ils se présentent. Le tableau ci-dessous montre l'un des accords possibles.

Note	Ré $\flat$	Mi $\flat$	Sol $\flat$	La $\flat$	Si $\flat$
Rapport de fréquences	16/15	6/5	45/32	8/5	16/9

Il faut toujours que ça se complique quelque part...

La gamme diatonique n'échappe pas aux problèmes qu'occasionne toujours l'incompatibilité des intervalles principaux d'octave, de quinte et de tierce. Presque toutes ses quintes sont de $3/2$, mais la quinte *ré-la* est un peu plus petite : $40/27$. Et les difficultés augmentent si l'on tente de compléter la gamme avec des bémols et des dièses : on retombe sans cesse sur la quinte du loup.

Il y a eu de multiples tentatives de résoudre le problème au moyen de différents « tempéraments », c'est-à-dire des systèmes qui tentent de concilier les diverses difficultés de la construction de la gamme en abandonnant partiellement la pureté d'accord de certains intervalles afin que d'autres soient un peu plus satisfaisants. En raison de la plus ou moins grande pureté de chaque intervalle, cette option définit la « couleur » de chaque tempérament.

En tout cas, bien que ces gammes et ces tempéraments parviennent à un équilibre relativement acceptable pour les différents intervalles qui les composent, c'est un équilibre qui tourne toujours autour de la tonique, à savoir de la note à partir de laquelle ont été calculées les autres.

Cela n'est pas un problème tant que l'on garde cette tonique comme centre. Mais lorsqu'on veut que le centre tonal soit ailleurs, toute la configuration de la gamme bouge.

Même si l'accord absolu de chacune des notes est maintenu, le déplacement du centre tonal altère les équilibres relatifs en fonction du nouveau centre tonal, ce qui génère un changement de « couleur ».

En exécutant une œuvre composée avec un centre tonal en *do*, sur un instrument accordé à partir du *do* suivant la gamme diatonique, l'œuvre est jouée telle qu'elle a été conçue. Supposons à présent que l'on souhaite interpréter la même œuvre, mais un ton plus haut, c'est-à-dire avec un centre en *ré*, sans changer d'instrument et en gardant son accord en *do*. Le résultat est que l'œuvre semblera non seulement plus aiguë, mais aussi « désaccordée ».

Pour le vérifier, il suffit de prêter attention à l'intervalle *ré-la*. Dans la gamme diatonique, cet intervalle ne s'accorde pas selon le rapport $3/2$, mais $40/27$. Dans la nouvelle interprétation, avec un centre tonal en *ré*, l'intervalle *ré-la* se retrouverait à l'endroit occupé auparavant par l'intervalle *do-sol* accordé selon le rapport $3/2$.

Tout le monde est content

Jusque-là, nous avons réussi à construire une gamme qui ne comprenait pas d'intervalles « désaccordés ». Survient alors une question inévitable : est-il possible de construire un tempérament où tous les rapports entre les notes sont maintenus, quelle que soit la note du centre tonal ? Ce problème est insoluble par le biais de la « compensation » d'intervalles, en changeant l'accord des notes pour les élargir ou les réduire. La solution consiste à faire en sorte que l'octave soit constituée de douze intervalles qui soient tous égaux dès le début. Ces douze intervalles doivent être douze demi-tons égaux qui, ensemble, complètent une octave.

Vincenzo Galilei, le père de Galilée, proposa dès le xvi^e siècle une division d'octave en douze demi-tons égaux. Ses demi-tons gardaient un ratio entre leurs fréquences de $18/17$. L'enchaînement de douze de ces intervalles donne de « petites » octaves et quintes respectivement de 1,9855... et 1,4919...

Prenons la question comme s'il s'agissait d'un simple problème mathématique. Appelons x le rapport de fréquences que doivent garder deux demi-tons consécutifs, de sorte que douze intervalles de x sont égaux à une octave. En langage algébrique, nous dirons que ce x doit satisfaire à l'égalité :

$$x^{12} = 2$$

donc

$$x = \sqrt[12]{2}.$$

Cette valeur de 1,05946... permet, par définition, d'obtenir une octave « parfaite ». Le comma pythagoricien se répartit équitablement sur toutes les notes de la gamme.

Comme nous l'avons vu, toutes les gammes et tous les tempéraments employés à tel ou tel moment de l'histoire répartissaient le comma pythagoricien en fonction des intervalles qu'ils jugeaient les plus importants : ceux qui restaient les plus purs, tandis que les moins importants étaient dénaturés. Dans le tempérament avec intervalle de 1,05946..., dit « tempérament égal », tous les intervalles sont de même « désaccordés ».

Pour calculer l'accord de chaque intervalle par ce système, on enchaîne autant de demi-tons que nécessaire dans chacun des cas. Prenons, par exemple, un intervalle de quinte ; celui-ci se compose de sept demi-tons et son accord est donc le suivant :

$$x^7 = (1,05946)^7 = 1,49830708.$$

Il résulte de l'application de cette simple règle une gamme de douze notes, dont la valeur des intervalles est détaillée dans le tableau ci-après :

Notes	Valeur des intervalles	
Do	$(1,05946)^0$	1
Do#	$(1,05946)^1$	1,05946309
Ré	$(1,05946)^2$	1,12246205
Ré#	$(1,05946)^3$	1,18920712
Mi	$(1,05946)^4$	1,25992105
Fa	$(1,05946)^5$	1,33483985

Notes	Valeur des intervalles	
Fa#	$(1,05946)^6$	1,41421356
Sol	$(1,05946)^7$	1,49830708
Sol#	$(1,05946)^8$	1,58740105
La	$(1,05946)^9$	1,68179283
Sib	$(1,05946)^{10}$	1,78179744
Si	$(1,05946)^{11}$	1,88774863
Do	$(1,05946)^{12}$	2

Le tempérament égal s'est universellement imposé, en particulier dans le cas des instruments à accord fixe et, qui plus est, l'oreille humaine semble le tolérer assez bien. Malgré quelques intervalles parfois trop grands (et, à l'inverse, d'autres excessivement petits), il offre de gros avantages : le premier, d'ordre pratique, est qu'il a permis d'exploiter les claviers existants ; le deuxième, du domaine musical, est que, du fait que tous les intervalles sont identiques, la « couleur » du système se maintient, quel que soit le centre tonal (bien que certains n'y voient pas là un avantage mais une perte de diversité).

Il est important de prendre en compte que tout ce que nous avons exposé jusqu'ici ne s'applique, en règle générale, qu'à des instruments à accord fixe. C'est le cas du piano, dont les notes gardent leur accord tout au long d'une interprétation musicale. Néanmoins, les instruments à accord libre, de même que la voix humaine, ont la possibilité d'alterner un accord diatonique et, si besoin, de s'adapter au tempérament égal.

Cents

Le cent est une unité de mesure logarithmique employée pour mesurer, avec une précision absolue, des intervalles de très petites fréquences. Il provient de la division de chaque demi-ton en 100 micro-intervalles (multiplicatifs !) égaux. Un intervalle de 1 cent est trop petit pour que l'oreille humaine soit capable de le percevoir.

Étant donné que, pour leur part, douze demi-tons forment une octave, le cent est un nombre c tel que

$$\text{donc } (c^{100})^{12} = 2$$

$$c^{1200} = 2$$

et par conséquent

$$c = \sqrt[1200]{2}.$$

Les cents fournissent une nouvelle manière de comparer la mesure des intervalles pour les différents tempéraments. S'agissant d'une mesure logarithmique, ils s'enchaînent par addition (et non par multiplication comme dans les cas précédents). Par conséquent, le travail avec des cents facilite beaucoup les calculs. Étant donné un intervalle p (exprimé dans son rapport fractionnaire), sa mesure en cents sera :

$$c(p) = 1200 \log_2 p.$$

Grâce à cette formule de conversion, il est possible de recalculer tous les intervalles et de les exprimer en cents, ce qui simplifie la comparaison entre les différents tempéraments :

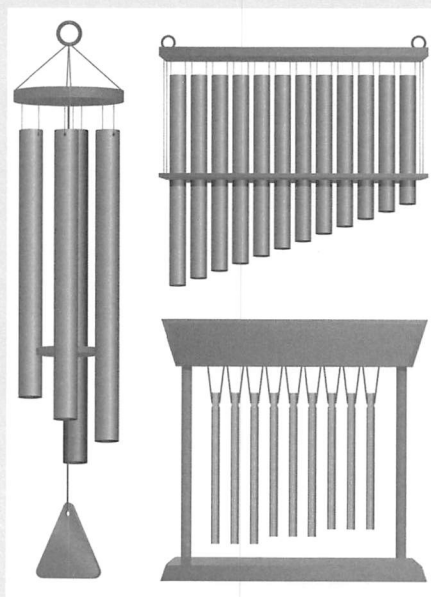
		Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si	Do
Gamme pythagoricienne	Rapport fractionnaire	1	9/8	81/64	4/3	3/2	27/16	243/128	2
	Cents	—	203,91	407,82	498,04	701,95	905,86	1109,77	1200
Gamme naturelle	Rapport fractionnaire	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
	Cents	—	203,91	386,31	498,04	701,95	884,35	1088,26	1200
Tempérament égal	Rapport fractionnaire	1	1,1224	1,26	1,334	1,498	1,681	1,887	2
	Cents	—	200	400	500	700	900	1100	1200

Par rapport aux quintes pures, les quintes du tempérament égal sont un peu plus petites. Les tierces du tempérament égal, de leur côté, se situent à mi-chemin entre les deux autres : elles sont plus grandes que les tierces pures, mais plus petites que les pythagoriciennes.

CLOCHES HARMONIQUES

Les carillons à vent sont formés par de petits tubes souvent métalliques de plusieurs longueurs, qui sont fixés à un support circulaire. Les tubes remués par le vent viennent frapper un anneau pendu au milieu. Généralement, l'accord des tubes répond à une gamme pentatonique, mais on pourrait les fabriquer dans différentes séries de sons. Il faut respecter tant la longueur proportionnelle des tubes que l'endroit où l'on pratique le trou dans chacun d'eux avant de les fixer. On part d'un tube L , qui sera le son fondamental de la gamme. De là, on calcule la longueur des autres tubes L_i avec la formule :

$$L_i = \frac{L}{(R_i)^2}.$$



Carillons de morphologies différentes fabriqués avec des tubes métalliques.

Commensurabilité

Même si le monde pythagoricien n'était pas familiarisé avec les fractions telles que nous les connaissons aujourd'hui, il maniait le concept équivalent des rapports entre nombres entiers. Comme nous l'avons vu, cette arithmétique particulière leur permettait d'expliquer leurs découvertes sur l'harmonie des sons de deux cordes en comparant leurs longueurs relatives : 2:1, 3:2, 4:3...

L'une des croyances les plus ancrées des pythagoriciens – et l'un des piliers de leur notion du fait que le nombre exprimait l'harmonie de l'univers – était que deux mesures, quelles qu'elles soient, étaient commensurables, c'est-à-dire qu'elles pouvaient être comparées en faisant appel à deux nombres entiers. Le concept de commensurabilité est directement lié à ce que nous appelons aujourd'hui les nombres rationnels. Un nombre rationnel est celui que l'on connaît communément sous le nom de fraction : la division, le rapport ou la raison entre deux nombres entiers (le second

Les rapports de fréquence R_i relient chaque son avec la fondamentale. Le nœud doit lui aussi se situer à une hauteur équivalente à 22,4 % de la longueur du support. Dans le tableau suivant sont présentées quelques valeurs de longueur des tubes pour un carillon de sept tubes :

Intervalle	R_i	L_i	Nœud
Fondamentale	1	30	6,72
2 ^a	1,125	28,28	6,34
3 ^a	1,25	26,83	6,01
4 ^a	1,34	25,98	5,82
5 ^a	1,5	24,49	5,48
6 ^a	1,67	23,24	5,20
7 ^a	1,875	21,91	4,91
8 ^a	2	21,21	4,75

Si on le souhaite, on peut aussi calculer des longueurs plus graves, par exemple, une quarte descendante. La fraction dans ce cas de R_i est l'inverse de la quarte descendante :

4 ^a desc.	0,75	34,64	7,76
----------------------	------	-------	------

non nul). En langage actuel, une définition de la commensurabilité pythagoricienne dirait que deux mesures quelles qu'elles soient A et B sont commensurables s'il existe une troisième mesure C et deux nombres entiers p et q tels que C égale p fois A et q fois B .

Autrement dit, que l'on peut établir avec précision combien de fois deux mesures sont plus (ou moins) grandes l'une par rapport à l'autre en ne faisant appel qu'à deux nombres entiers. Néanmoins, à leur époque, les pythagoriciens découvrirent déjà, à la consternation générale, qu'il y avait des nombres incommensurables, à savoir non exprimables en rapport de nombres entiers, qui reçoivent actuellement l'appellation peu généreuse d'« irrationnels ».

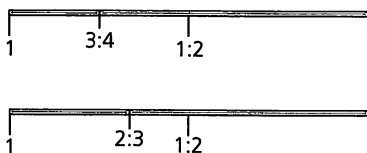
Les deux nombres irrationnels les plus connus sont π et $\sqrt{2}$. Ce dernier apparaît lorsqu'on calcule, au moyen du théorème de Pythagore, l'hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés de valeur 1, belle illustration mathématique du dicton « on n'est jamais si bien servi que par soi-même ».

Comme nous l'avons vu, la proposition de Vincenzo Galilei d'accorder les intervalles par le biais d'un rapport de nombres entiers de 18/17 ne permettait pas d'obtenir des octaves pures. Son choix du rapport 18/17 est une bonne approximation, mais il faut se demander s'il n'y aurait pas un nombre rationnel

LES TROIS MOYENNES

Pythagore était influencé par ses connaissances sur les moyennes (arithmétique, géométrique et harmonique) et le mysticisme des nombres naturels, notamment les quatre premiers, appelés « tetrakis ».

Comme on peut l'observer dans la figure suivante,



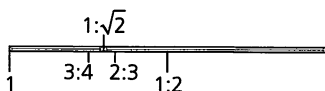
3:4 est la moyenne arithmétique de 1 et 1/2 :

$$1 - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2}$$

alors que 2:3 est la moyenne harmonique de 1 et 1/2 :

$$\frac{1 - \frac{2}{3}}{\frac{3}{1}} = \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$$

Pythagore prouva expérimentalement que des cordes avec des longueurs de raisons 1:2, 2:3 (moyenne harmonique de 1 et 1/2) et 3:4 (moyenne arithmétique de 1 et 1/2) produisaient des combinaisons de sons agréables et construisit, nous l'avons vu, une gamme à partir de ces proportions. Il nomma ces intervalles « diapason », « ediapente » et « diaterson ». Nous les appelons aujourd'hui octave, quinte et quarte. Mais qu'est-il advenu de la moyenne géométrique ? Fut-elle réfutée pour son incommensurabilité ? Elle correspondait pourtant exactement au *fa dièse* de la gamme chromatique !



qui soit équivalent à $\sqrt[12]{2}$, la moyenne du demi-ton du tempérament égal. C'est-à-dire s'il existe deux entiers positifs p et q tels que :

$$\frac{p}{q} = \sqrt[12]{2}.$$

La réponse est que ce nombre rationnel n'existe pas. Par conséquent, il est impossible d'accorder le demi-ton avec un rapport de nombres entiers a/b de manière à ce que douze demi-tons enchaînés forment une « véritable » octave. S'ils existaient, on obtiendrait :

$$\begin{aligned} & \left(\frac{p}{q} \right)^{12} = 2 \\ \text{donc} \quad & \left(\frac{p^6}{q^6} \right)^2 = 2. \end{aligned}$$

Et nous aurions donc trouvé deux entiers $p' = p^6$ et $q' = q^6$ tels que $(p'/q')^2 = 2$, alors $\sqrt{2}$ serait un nombre rationnel, chose dont nous savons qu'elle est fausse.

Que diraient les pythagoriciens s'ils voyaient qu'à la fin de cette histoire, la conclusion est que ce sont les nombres irrationnels qui viennent résoudre le problème de l'accord ?

Chapitre 2

L'autre dimension : le temps

*Je considère que le rythme est la partie primordiale et peut-être essentielle de la musique ;
je pense qu'il a vraisemblablement existé avant la mélodie et l'harmonie,
et j'ai enfin une préférence secrète pour cet élément.*
Olivier Messiaen (1908-1992)

L'univers est en changement permanent. La marche du temps se manifeste dans le changement : changements de position, de forme, mutations chimiques, physiques... Les phénomènes biologiques, météorologiques, géologiques, astronomiques transitent par le devenir temporel. Dans cet univers en mouvement, l'ouvrage des hommes et des femmes n'échappe pas à son cours. Le rythme est la façon dont les événements se succèdent : tant dans les processus naturels que pour ceux que produit l'action humaine.

Les phases de la Lune et les marées dansent au rythme des astres sur leurs orbites, de même que les saisons, les jours et les nuits. Heureusement, l'humanité a été capable de surprendre le temps par de nouveaux progrès, loin de la stricte pulsation de l'horloge. Bref, nous appelons rythme la succession et la réitération d'événements. Le rythme musical, en particulier, est la fréquence à laquelle se produisent les articulations de l'émission de sons.

Depuis l'Antiquité, l'humanité a fait des tentatives pour conserver les tours mélodiques de manière graphique. Les neumes, graphismes musicaux primitifs, donnent une idée sur le phrasé et l'intention du chant, mais ne transmettent ni les hauteurs ni les rythmes exacts. Il fallait nécessairement connaître la mélodie, transmise oralement ou par imitation, pour pouvoir lui appliquer le sens musical qu'indiquaient les neumes.

Groupements rythmiques. Rythme, pulsation, accents

Entendre de la musique crée chez l'auditeur le besoin d'accompagner certaines articulations sonores par des mouvements du pied, de la main ou de la tête. Ce premier regroupement rythmique perçu est ce que l'on appelle « pulsation ».

On peut approfondir et accorder encore plus d'attention à ce que nous appellerons « subdivision de la pulsation », à savoir le contenu rythmique de chacune de ces pulsations. Ce rythme interne peut être de deux types : « binaire », lorsqu'on entend la pulsation subdivisée en deux, ou « ternaire » si l'on entend la pulsation subdivisée en trois. Si l'on a une sensation de pulsation subdivisée en quatre, celle-ci est aussi qualifiée de binaire. Les groupements plus grands sont généralement considérés comme intégrés par les plus petits, comme par exemple $5 = 3 + 2$ ou $5 = 2 + 3$. On pourrait dire que la pulsation est le battement du morceau de musique.

De la Grèce aux premières figures proportionnelles

Le premier exemple historique de notation musicale dont nous ayons la preuve vient des cultures du Croissant Fertile, plus précisément d'une tablette remontant environ à 2000 av. J.-C. et trouvée dans la localité sumérienne de Nippur, dans l'Iraq actuel, où est inscrite une pièce musicale en gamme diatonique, composée en harmonies de tierce. Plus tard, les Grecs élaborèrent un système de notation au moyen duquel ils étaient capables de représenter la hauteur et la durée d'une note, mais non les harmonies. Ce que l'on connaît comme l'épithaphe de Seikilos, datée entre le II^e siècle av. J.-C. et I^{er} siècle ap. J.-C., contient le registre musical complet d'un hymne : sur les paroles de ce dernier, se succède une série de lettres et de symboles dont l'étude attentive a permis aux chercheurs modernes de disposer d'une idée approximative de la nature de la composition.

Les divers systèmes de notation d'origine grecque tombèrent dans l'oubli après la chute de Rome et ce ne fut qu'aux environs du IX^e siècle, sous l'égide du chant grégorien, qu'apparut en Europe un nouveau système, le « neumatique », dérivé du marquage syllabique de la poésie latine. Les neumes étaient des graphismes musicaux primitifs qui indiquaient, par la forme de chacun d'eux, la note approximative correspondant à la trame des paroles de l'hymne, et ils donnaient ainsi une idée plus ou moins complète du phrasé et de l'intention du chant ; en revanche, ils n'évoquaient ni les hauteurs ni les rythmes exacts. Il était donc nécessaire de connaître la mélodie qui devait être transmise acoustiquement, pour pouvoir lui appliquer l'information musicale exprimée en notation neumatique. Pour pallier ces limitations, les neumes furent dotés d'une série complexe d'annotations supplémentaires et disposés à différentes hauteurs indiquées par le biais de quatre lignes parallèles, germe de l'actuelle portée.

Jusqu'au milieu du XIII^e siècle, l'Europe fit l'objet d'une forte sécularisation des arts, en accord avec la perte de prestige de l'Église. Jusqu'alors, l'écriture musicale

CHANT À LA BRIÈVETÉ DE LA VIE

L'épithaphe de Seikilos est gravée sur une tombe grecque trouvée dans la localité d'Aydin, dans la Turquie actuelle. Le texte complet de l'épithaphe dit : « La pierre que je suis est une image. Seikilos m'a placée ici, signe immortel d'un souvenir éternel. » Ce texte est suivi d'une pièce musicale, composée des paroles d'un hymne au-dessus desquelles est inscrite une série de lettres et de signes. Transcrit en écriture grecque moderne, le morceau a l'aspect suivant :

$\text{C } \bar{\text{Z}} \text{ } \bar{\text{Z}}^{\text{J}}$ $\text{KIZI}^{\text{J}} \bar{\text{K}} \text{I} \dot{\text{Z}} \dot{\text{K}} \text{O } \bar{\text{C}} \text{O}\bar{\Phi}$ $\text{Ὁ σον ζῆς, φαί νου, μη δένῳλ ως σύ λυ ποῦ·}$ $\text{C } \text{K} \text{Z} \dot{\text{I}} \text{K} \dot{\text{I}} \text{K} \bar{\text{C}} \text{O}\bar{\Phi} \text{C } \text{K} \text{O} \text{I} \text{Z} \bar{\text{K}} \text{C} \bar{\text{C}} \text{CXI}^{\text{J}}$ $\text{πρὸς ὁλ ἰγον ἐ σπὶτὸ ζῆν, τὸ τέ λος ὁ χρόνος ἀπαι τεῖ.}$
--

Le texte de l'hymne peut se traduire ainsi :

« Brille tant que tu vis,
ne souffre pas pour rien ;
la vie ne dure guère,
et le temps exige son tribut. »

Quant à la partie musicale, en notation moderne, elle ressemblerait à cela :



se développait presque exclusivement dans les cercles religieux ; hors de ce cadre, la musique populaire vivait un riche essor polyphonique qui requérait une écriture différente.

Vers la fin du XIII^e et au début du XIV^e, une nouvelle forme d'écriture musicale vit le jour, plus efficace, qui fut documentée par le français Philippe de Vitry (1291-1361) dans son traité *Ars Nova*. Son œuvre, aussi théorique que musicale, est caractérisée par l'approfondissement de l'écriture rythmique, étant donné la nécessité d'inscrire graphiquement la nouvelle polyphonie, où différentes voix doivent s'articuler avec une grande précision.

SYLLABES ET MELISMAS

Au début du XIII^e siècle, la musique était notée en Europe au moyen de neumes disposés sur une trame de quatre parallèles, régie par une clé qui indiquait la hauteur.



*Un bon exemple de la complexité atteinte par la notation neumatique :
livre d'hymnes finlandais du Graduale Aboense, des XIII^e-XIV^e siècles.*

Les hymnes où chaque syllabe correspondait à une seule note étaient dits syllabiques, par opposition aux mélismatiques où une même syllabe pouvait être chantée en une succession de notes différentes. Quand la succession de notes était ascendante, les neumes qui les indiquaient adoptaient l'aspect de carrés serrés et se lisaient de bas en haut ; dans le cas contraire, ils ressemblaient à des losanges et devaient se lire de gauche à droite. Par exemple, et pour le cas d'un neume qui indique une syllabe qui se chante avec trois notes, il existe quatre variations, à savoir :

Perfectum/imperfectum

L'*Ars Nova* fut révolutionnaire à plus d'un titre et concrétisa ce qui déjà s'ébauchait dans les travaux de nombreux musiciens contemporains. Jusque-là, la prédominance de la musique religieuse avait donné la préférence aux subdivisions ternaires par association du trois à la Sainte Trinité et, par conséquent, à la perfection.

L'œuvre de Philippe de Vitry posa les bases d'une écriture susceptible d'apporter une réponse aux besoins rythmiques d'une expression musicale de plus en plus sophistiquée, où cohabitaient le ternaire et le binaire, et précisa avec clarté les proportions entre les figures. La solution conçue par le musicien et poète français

	<i>Scandicus</i>	Trois notes ascendantes.
	<i>Climacus</i>	Trois notes descendantes.
	<i>Torculus</i>	Une note, suivie d'une autre ascendante et d'une troisième descendante.
	<i>Porrectus</i>	Note ascendante, note descendante, note ascendante

La notation neumatique tardive se faisait avec des symboles qui nous paraissent sans cesse familiers et qui mettent clairement en évidence l'origine historique de la notation moderne :

	<i>Flat</i>	Cette marque a la même signification que le bémol actuel, et elle n'est indiquée que sur la ligne du si.
	<i>Mora</i>	Comme dans la notation moderne, le point après une note indique que celle-ci doit se prolonger.

est extrêmement ingénieuse, d'autant qu'elle adopte le binaire et le ternaire en utilisant les mêmes graphismes ou figures de notes. Sa méthode est basée sur trois systèmes proportionnels et crée une nouvelle figure, la « minime », qui s'ajoute à la série existante à l'époque qui incluait déjà « longue », « brève » et « demi-brève ». Les trois types de proportion entre les figures sont les suivantes :

- Mode (*modus*) : rapport entre longue et brève.
- Temps (*tempus*) : rapport entre brève et demi-brève.
- Prolation (*prolatio*) : rapport entre demi-brève et minime.

Les deux premières proportions, le mode et le temps, pouvaient à leur tour être :

- ternaires ou « parfaites » ;
- binaires ou « imparfaites ».

Quant au troisième type de proportion, la prolation, on l'appelait :

- mineure, si elle était binaire ;
- majeure, si elle était ternaire.

Le tableau suivant indique les proportions entre les différentes figures de note et leurs équivalences en termes de durée par rapport à telle ou telle proportion :

Proportion	Figures	Rapport entre figures
Modus perfectum	Longue/brève	1 longue = 3 brèves
Modus imperfectum	Longue/brève	1 longue = 2 brèves
Tempus perfectum	Brève/demi-brève	1 brève = 3 demi-brèves
Tempus imperfectum	Brève/demi-brève	1 brève = 2 demi-brèves
Prolatio major	Demi-brève/minime	1 demi-brève = 3 minimes
Prolatio minor	Demi-brève/minime	1 demi-brève = 2 minimes

Il faut signaler que la notion de binaire ou ternaire n'est pas exclusive de la pulsation, mais elle se répète dans les groupements rythmiques majeurs. Par exemple, une mesure peut avoir deux ou trois pulsations et nous la qualifierons donc également de binaire ou ternaire. Les mesures ne sont qu'une convention créée pour faciliter la compréhension et la notation du rythme. Elles partent d'un principe de base : la division du temps d'une composition musicale en parts égales.

Les mesures se forment en accentuant la première pulsation d'une série de deux ou plus, de manière à ce qu'elles se regroupent en un archétype. Par exemple, et pour le cas d'une pulsation binaire, UN deux, UN deux ; ou bien, dans le cas

d'une pulsation ternaire, UN deux trois, UN deux trois. Les mesures sont indiquées de nos jours au moyen d'une fraction p/q où p indique le nombre de notes comprises dans la mesure, et q le type de notes dont il s'agit (1 désigne une ronde ; 2 une blanche ; 4 une noire, etc.). Nous approfondirons cela plus loin, ainsi que d'autres aspects de la mesure et de sa notation.

Revenons-en à Philippe de Vitry. Avec la combinaison du *tempus* et de la *prolatio*, ajoutée au fait que l'on dispose de types de pulsations, l'*Ars Nova* obtint des structures rythmiques bien différenciées et définies, qui étaient symbolisées de la manière suivante :

- Un cercle avec un point au milieu représentait une mesure ternaire avec division ternaire de la pulsation, équivalant à la mesure actuelle de 9/8.
- Un cercle sans point à l'intérieur représentait une mesure ternaire avec subdivision binaire de la pulsation, équivalant à la mesure actuelle de 3/4.
- La lettre C majuscule avec un point à l'intérieur représentait une mesure binaire avec subdivision ternaire de la pulsation, équivalant à l'actuelle 6/8.
- La lettre C sans point représentait une mesure binaire avec subdivision binaire, équivalant à l'actuelle 2/4.

Dans le tableau suivant, ces quatre rythmes sont résumés avec les symboles de l'époque et les équivalences entre différentes figures de note. Observons comment, dans le *tempus perfectum*, *prolatio major*, une figure brève (le carré) équivaut à trois demi-brèves (losanges), dont chacune équivaut à son tour à trois minimes (un losange avec un bâton vertical) :

Tempus perfectum	Prolatio major	9/8	⊙ ■ = ◆ ◆ ◆ = ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
Tempus perfectum	Prolatio minor	3/4	○ ■ = ◆ ◆ ◆ = ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
Tempus imperfectum	Prolatio major	6/8	Ⓒ ■ = ◆ ◆ = ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓
Tempus imperfectum	Prolatio minor	2/4	Ⓒ ■ = ◆ ◆ = ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓

PHÉNOMÈNE ET REPRÉSENTATION

De la même manière que les mathématiques engendrent des modèles qui tentent de conceptualiser la réalité, il est important de concevoir l'écriture musicale comme une représentation graphique d'un phénomène, et non le contraire. Lorsqu'un musicien se trouve devant une pièce écrite d'une œuvre qu'il n'a jamais entendue, il n'obtiendra de cette partition qu'une « approximation » de l'idée musicale du compositeur. Il suffit d'écouter différentes versions d'une même œuvre interprétée par des musiciens différents pour apprécier la diversité des regards. Il se passe à peu près la même chose qu'avec un texte écrit qu'on lit ou qu'on récite : un poème par la voix d'un acteur a par exemple du poids et un sens expressif inexplicables, et cette magie ne lui a été transmise par aucun signe apparent sur le papier. Une carte d'un pays n'est qu'une représentation graphique bidimensionnelle du territoire. Ce n'est pas le pays, mais elle peut être une aide et un guide au cours d'un voyage. La partition est capable de communiquer un aspect technique de la musique, mais son interprétation demeure entre les mains du musicien, dont les choix esthétiques sont ce qui compléteront le message et le doteront de sens.

Percussion : le rythme pur

Le rythme s'habille de la mélodie, de ses liaisons, de ses changements de hauteur et d'intensité. Dans la percussion, le rythme reste à nu. Des coups d'intensité, de timbre et de hauteur variés les embellissent. En dehors de ces nuances, le coup est présent ou pas, il n'y a aucune alternative. C'est ainsi que le rythme se montre le plus nettement et peut être apprécié dans son essence, ce qui est idéal pour un regard mathématique.

Dans la percussion, les séquences cycliques sont caractérisées par la distribution des articulations. Nous nous proposons de noter exclusivement ces articulations, dépouillées des prolongations des coups en raison de la résonance. De cette manière, on pourra percevoir l'articulation précise et comprendre la séquence. Nous pouvons distinguer trois niveaux de sensation rythmique, selon le degré d'intensité :

- Le premier niveau, l'articulation la plus rapide, correspond aux subdivisions de la pulsation. Nous les numérotions 1, 2, 3, etc., à compter de la première pulsation jusqu'à la pulsation suivante, pour recommencer le décompte.
- Le deuxième niveau est formé par les pulsations ; ce sont tous les numéros 1 de la séquence.
- Dans le troisième niveau, vont apparaître quelques pulsations que l'on entend avec plus d'intensité : les accents.

Voici une séquence rythmique de 9/8 exprimée dans les trois niveaux décrits :

1°	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	...
2°	1			1			1			1			1			1			...
3°	1									1									...

Nous allons prendre pour référence la deuxième ligne, qui ne montre que des pulsations. En complétant les divers endroits par des zéros, nous obtenons une représentation claire de la séquence de pulsations. Chaque 1 représente un coup ; chaque 0 un silence : la rythmique pure.

1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	...
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	-----

Les pulsations sont la structure sur laquelle se bâtit la musique ; comme les fils de chaîne sur lesquels se compose le tissu. Nous avons parlé de coups et de silences. Nous prendrons, comme unité de mesure de ces coups, la « croche » qui sera symbolisée par β . De la même manière qu'il n'y a que des coups et des silences, on ne trouvera que des croches et des silences de croches. Nous symboliserons ces derniers par γ . L'unité la plus simple formée par un coup et un silence (ou bien une croche et un silence de croche) sera nommée noire et nous la symboliserons par β . Nous introduirons enfin un nouveau symbole dans notre notation, la noire « pointée », $\beta^\cdot$, pour indiquer les cas où un premier silence est suivi d'un autre, c'est-à-dire pour le cas de la séquence $\beta\gamma$.

Nous considérons en fait un système binaire où nous assignons les valeurs 1 et 0 respectivement aux croches et aux silences de croches. Les équivalences des symboles dans notre notation, dans une mesure de 4/4, se notent ainsi :

β	β	β	β	=	β	γ	β	γ	β	γ	β	γ	=	1	0	1	0	1	0	1	0
---------	---------	---------	---------	---	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---------	----------	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Observons comment la séquence coup-silence-coup-silence se répète deux fois. Une mesure de deux pulsations, dont chacune dure une noire pointée (6/8), sera notée ainsi :

$\beta^\cdot$	$\beta^\cdot$	=	β	γ	γ	β	γ	γ	=	1	0	0	1	0	0
---------------	---------------	---	---------	----------	----------	---------	----------	----------	---	---	---	---	---	---	---

Recouvrir « l'espace » sonore

Dans cette partie, nous allons analyser plus en détail les structures des canons. Pour l'instant, nous nous occuperons simplement de l'aspect rythmique de cette forme musicale, appelée « canon rythmique ». L'exécution simultanée de différentes cellules rythmiques représente un défi d'interprétation important, tant sur le plan individuel que collectif. Une façon de s'initier à cette pratique est l'exercice du canon rythmique.

Partons du rythme ♩. ♩ = 3 + 3 + 2 = 10010010, qu'exécutent cycliquement deux musiciens. Le deuxième débute sa séquence après la première articulation du premier interprète :

1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	...
	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	...

Dans la séquence précédente, nous pouvons voir qu'aux moments 3, 6, 11, etc. (marqués en gras), il n'y a articulation d'aucun des deux rythmes. Certains modèles rythmiques acceptent d'être interprétés en canon, de sorte que :

- a) deux musiciens ne commencent pas leur articulation au même moment ;
- b) il n'y a aucun moment sans aucune articulation.

Il est possible de comparer cette situation avec le problème mathématique général de la *pavage du plan*, c'est-à-dire quand il s'agit de couvrir la totalité d'un plan par des formes géométriques régulières. Dans notre cas, ce que l'on désire recouvrir complètement est le plan sonore.

Il est évident qu'une structure simple comme ♩. ♩ = 100100 remplit ce critère. Plus la séquence rythmique que l'on prend comme base est grande, plus le défi est grand. La séquence de douze coups suivante :

1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

couvre complètement le plan sonore sans aucun instant de silence, si l'on réalise un canon à trois voix avec des entrées successives toutes les trois articulations. Voyons le développement des trois voix :

1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	...
				1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	...
								1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	...

PROPOSITION ET RÉPONSE

En principe, le mot « canon » s'emploie pour désigner les règles de comportement des chanteurs dans l'interprétation d'une pièce vocale. À partir du ^{xvi}^e siècle, ce mot en vint à qualifier un type de composition concret, où un meneur (aussi appelé *dux* ou *proposta*) interprétait une mélodie qui était ensuite reprise par un ou des suiveurs (le *comes* ou *ri-posta*). La mélodie du suiveur pouvait être rythmiquement équivalente à celle du meneur ou, au contraire, consister en transformations de celle-ci d'une complexité plus ou moins grande. La comptine *Frère Jacques* est un exemple très connu d'un canon où les suiveurs répètent la mélodie principale sans aucune variation musicale.

Parmi les transformations que peuvent adopter les voix successives d'un canon, on trouve : le nombre même des voix ; l'intervalle « d'attente » entre la première voix et les suivantes, voire entre les différentes voix dans le cas où ce n'est pas toujours la même ; le tempo de la mélodie interprétée par les voix successives ; la mélodie des suiveurs qui peut être une inversion de la principale, une rétrogression de celle-ci ou bien une combinaison des deux ; etc.

Le canon fut un type de composition très courant dans le cadre de la musique religieuse et il touche à sa plus haute expression dans l'œuvre de compositeurs de la fin du Moyen-Âge, tel Guillaume de Machaut, ou de la Renaissance, comme Josquin des Prés. Néanmoins, le plus éminent représentant de la technique du canon, ainsi que de bon nombre de formes musicales structurellement complexes, dont il offrit des exemples considérés à juste titre comme « canoniques », fut le grand Jean-Sébastien Bach.

Premières mesures de la messe L'Homme armé super voces musicales de Josquin des Prés, dont le premier mouvement consiste en un canon à trois voix. La voix centrale est la plus lente ; la troisième chante deux fois plus vite que la deuxième, et la première trois fois. Des lignes unissent les quatre premières notes de la composition de chacune des trois voix.

D'un point de vue mathématique, il est intéressant de voir s'il existe une méthode qui permette de dessiner ce type de séquences. Il faut prendre en compte les éléments suivants :

- quantité totale d'articulations (a) ;
- quantité de voix (ν) ;
- déplacement des entrées des voix (d).

Pour que le canon ait une solution, il faut qu'il réponde aux conditions suivantes :

- La quantité d'articulations (a) doit être divisible par ν .
- Pour couvrir a articulations par ν voix, les articulations étant toutes identiques, la structure du canon doit correspondre à a/ν « un ».
- Les entrées successives se déplacent d'une valeur égale à a/ν , en vérifiant qu'il n'y aura pas de positions dupliquées avec des un.

Continuons avec un exemple à quatre articulations ($a = 4$) et deux voix ($\nu = 2$). La structure devra avoir une entrée toutes les $a/\nu = 4/2 = 2$ articulations. Dans ce cas, il est possible de trouver toutes les alternatives, et évaluer quelles sont les entrées correctes de manière naturelle n'est pas compliqué. Les structures possibles sont donc :

1100

1001

S'agissant d'une séquence qui se répète cycliquement, il est facile d'observer que les deux positions sont équivalentes. Pour le premier cas, qui n'admet qu'un déplacement de deux articulations, c'est :

1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
		1	1	0	0	1	1	0	0	1	1

Et pour le second :

1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1
		1	0	0	1	1	0	0	1	1	0

Nous voyons qu'une fois que le canon est en cours, l'exécution est la même dans les deux cas. Prenons alors pour exemple une structure de 12 articulations, réparties en groupes de durée égale. Si l'on souhaite couvrir ces 12 articulations avec la quantité de 3 voix qui veulent s'y intégrer,

$$a = 12$$

$$\nu = 3$$

$$\frac{a}{\nu} = \frac{12}{3} = 4$$

il faut assembler 3 groupes de 4.

En partant de la structure suivante,

0000 0000 0000

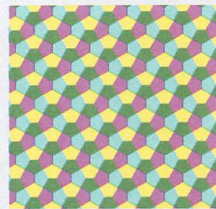
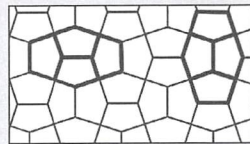
chacune des quatre positions des groupes est occupée par un 1, de sorte que « toutes » peuvent être occupées par des *un*, « juste une fois » :

1000 0100 0011

Pour éviter de dupliquer les coups (*un* dans les colonnes), il est nécessaire de réaliser un déplacement égal à a/ν , ici 4.

CARRELER L'UNIVERS

Un pavage est constitué de figures plus ou moins régulières qui se répètent et recouvrent le plan. Le cas le plus simple, que l'on rencontre au quotidien, est celui des dallages et des carrelages. Le pavage doit remplir deux critères : il ne faut pas qu'il y ait de trous, ni que les figures se chevauchent. Le carré et l'hexagone régulier sont deux exemples de figures géométriques simples qui permettent de couvrir le plan. Mais le pavage peut aussi comporter des figures irrégulières, comme celles qui ornent une grande partie des rues du Caire et que l'on voit sur les illustrations ci-contre, la seconde avec un effet de relief.



La mesure. Métrique. Subdivisions

L'accent et la mesure

Un discours musical alterne les pulsations fortes et faibles. Dans l'écriture musicale, les pulsations fortes régulières structurent le discours : sur chaque pulsation forte débute une mesure qui durera jusqu'à la pulsation forte suivante. La mesure est donc chaque fragment rythmique entre deux pulsations fortes. Si les mesures d'un passage musical ont la même durée et les mêmes caractéristiques, on dit que l'œuvre est régulière ; mathématiquement, nous dirions qu'elle est constante. Grâce à cette régularité, il suffit de définir ces caractéristiques constantes au début de l'œuvre.

Types de mesures

La mesure est dite simple si ses pulsations ont une subdivision binaire, et composée si la subdivision est ternaire. Son contenu est indiqué au moyen d'une fraction qui change de forme selon que la mesure est simple ou composée. Dans le numérateur, le nombre indique la quantité de pulsations, et dans le dénominateur, il correspond à une figure de note qui mesure, par convention, les unités de pulsation. Par exemple, une ronde équivaut à une unité de pulsation ; une blanche à deux ; une noire à quatre. Dans la mesure simple, le dénominateur indique la note qui définit la pulsation alors que dans la mesure composée, le dénominateur est celle qui correspond à la subdivision de la pulsation. Les unités de pulsation les plus employées sont la noire (un coup et un silence par pulsation) et la noire pointée (un coup et deux silences par pulsation).

Voyons quelques exemples. Une mesure simple, de deux pulsations de noire par mesure, $2/\text{noire}$, s'indique par la fraction $2/4$.

Le 2 correspond à la quantité de pulsations et le 4 indique que cette pulsation est une noire. Une mesure composée, de deux pulsations par mesure, aura deux pulsations de noire pointée : $2/\text{noire pointée}$.

Mais un problème survient quand on veut la transformer en fraction : il n'existe pas de nombre qui corresponde à la noire pointée (ni à aucune autre figure pointée), c'est pourquoi il n'y a aucune manière d'exprimer la durée de la pulsation dans le dénominateur. Cela se résout en indiquant, au lieu du chiffre de la figure de la pulsation, celui correspondant à la note de la subdivision de pulsations. Dans notre exemple, la subdivision est représentée par des croches ; ayant deux noires pointées par mesure, il aura un total de six croches. En conséquence, la fraction sera $6/8$.

La notation du rythme pur nous permet de voir clairement l'alternance binaire de coups et de silences, de *un* et de *zéros* :

2/4

<				<				<			
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

3/4

<						<					
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

4/4

<								<								<								
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Alors que le ternaire alterne un 1 tous les deux 0 :

6/8

<						<								
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

9/8

<								<						<												
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Les mesures les plus fréquentes, selon leur quantité de pulsations, sont :

	2 pulsations	3 pulsations	4 pulsations
Mesure simple	2/4	3/4	4/4
Mesure composée	6/8	9/8	12/8

TOUTES LES MESURES DU MONDE

Comme nous l'avons vu, la mesure est une structure qui a une échelle de durée déterminée et où alternent sons et silences. En dehors de toute notion artistique, il est intéressant d'analyser toutes les manières dont une mesure peut être complétée par certains groupes rythmiques différents. Ce qui suit est un jeu de permutations amusant qu'un étudiant en musique peut réaliser pour s'exercer à la combinaison d'une sélection quelconque de groupes rythmiques et de silences. Partons d'une mesure de 4/4 et plaçons-y quatre groupes rythmiques équivalant à une noire, que nous identifierons comme A, B, C et D. Le procédé est le suivant.

Définissons une première mesure :

$$4/4 \mid A \ B \ C \ D \mid$$

À partir de cette combinaison des quatre éléments, on procède à ce que l'on appelle une « permutation des valeurs », qui totalise quatre cycles de permutations :

Étape 1 : On choisit le dernier élément de la mesure (ici, le groupe D) qui sera l'objet générateur de la première série de permutations. On poursuit ensuite en composant la mesure suivante, en plaçant D entre B et C :

$$4/4 \mid A \ B \ D \ C \mid$$

Irrégularités

Les exemples que l'on vient d'exposer reflètent des rythmes avec des mesures et des pulsations régulières, c'est-à-dire que toutes les mesures ont la même durée, de même que les pulsations. Mais ce n'est pas toujours le cas : par exemple, dans les rythmes africains et dans la musique américaine dérivée de ces derniers, il est fréquent de trouver des modèles rythmiques irréguliers. Ces irrégularités se sont aussi présentées dans le monde de la musique académique.

Il existe un modèle rythmique d'une grande richesse, très répandu dans certaines musiques d'Amérique et d'Afrique. Dans notre jargon, nous dirions qu'il est composé par des mesures régulières de trois pulsations irrégulières. Cela signifie que toutes les mesures ont la même durée, mais que leur contenu est fait de pulsations de différentes durées. La mesure est formée par deux pulsations ternaires et une pulsation binaire ; suivant notre nomenclature, deux pulsations de noire pointée et une de noire, ce qui donne :

Étape 2 : Dans l'étape suivante, le même élément D est placé en deuxième position, en déplaçant à présent l'élément B vers la droite. Cette nouvelle mesure s'écrit :

4/4 | A D B C |

Étape 3 : Enfin, l'élément D est disposé en première position, complétant ainsi un premier cycle de permutations :

4/4 | *D A B C* |

La mesure obtenue devient la nouvelle combinaison à permuter. Le processus est le même : l'élément placé en quatrième position (qui est maintenant le C) est pris pour être déplacé, et l'on répète les étapes de 1 à 3 :

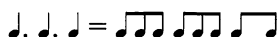
4/4 | D A B C | D A C B | D C A B | C D A B |

Après avoir répété le processus avec B puis avec A, on revient à l'ordre initial :

4/4 | C D A B | C D *B* A | C *B* D A | *B* C D A |

4/4 | B C D A | B C A D | B A C D | A B C D |

Ce système de permutation de valeurs décline toutes les combinaisons de séquences pour les groupes rythmiques choisis.



<								<								<								
1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	

Exprimée par ses subdivisions, cette mesure est formée de huit croches, c'est-à-dire un contenu total égal à une mesure de 4/4. Elle indique pourtant une réalité rythmique résolument différente, puisque la mesure de 4/4 a quatre pulsations binaires, alors que cette nouvelle mesure présente un mélange de pulsations binaires et ternaires.

Ce type d'irrégularités s'exprime généralement par une indication de mesure qui montre le nombre de subdivisions de chaque pulsation séparé par le signe + ; pour cet exemple, $3 + 3 = 2$.

Rythmes en strates

Dans différentes cultures du monde, on rencontre une pratique particulière des percussions dite « polyrythmie », où divers motifs avec des articulations différentes s'additionnent en un produit sonore global, complexe et organisé. Les résultats musicaux sont extrêmement beaux, car leur variété est immense tant pour la partie rythmique qu'instrumentale. Un art vivant, observé et analysé par les mathématiques.

Si chacune des strates rythmiques est essentiellement différente, il est possible que le rythme soit le même, mais il sera interprété en décalé, comme dans un canon rythmique, ou bien dans sa version rétrograde, à savoir inversée. Dans tous les cas, le résultat est polyrythmique. Le *pajarillo*, le *seis corrido* et le *seis derecho* sont trois formes polyrythmiques du *joropo*, une musique des plaines du Venezuela et de Colombie, qui se caractérise par la diversité des rythmes qu'exécutent simultanément des instruments typiques de la musique des plaines, essentiellement mandoline, harpe, *cuatro* et maracas. Une des caractéristiques rythmiques du *joropo* est la manière croisée dont s'exécutent les mesures de 6/8. Le résultat est :

0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Un exemple très répandu dans la musique latino-américaine et très présent aussi en Europe, est le croisement « trois sur deux », habituellement écrit comme une mesure de 6/8 et une de 3/4 qui s'exécutent simultanément. En écriture binaire, nous aurions :

1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0

Amalgames

Tant pour des besoins de compositions plus libres qu'en raison de l'intérêt de mettre en partition des œuvres provenant de la musique populaire d'une grande richesse rythmique, le XX^e siècle a vu de nouvelles manières d'exprimer les rythmes. On a ainsi recours à la combinaison de séquences de mesures de durées différentes. Par exemple, dans des groupements de sept pulsations de noire, on peut soit combiner une mesure de 3/4 et une de 4/4, soit une de 2/4, une de 3/4 et une autre de 2/4. Dans une mesure de cinq pulsations de noire, on pourrait en regrouper une de 2/4 et une de 3/4, ou vice-versa.



Partition provenant du Concertino pour quatuor à cordes d'Igor Stravinski sur laquelle on peut apprécier l'immense variété rythmique de ce grand novateur de la musique du xx^e siècle.

La vitesse : le métronome

Une fois une séquence rythmique écrite, avec ses figures et ses silences, encore faut-il la reproduire. S'il s'agit d'un interprète qui n'a jamais entendu cette phrase musicale, il pourra fournir avec une grande approximation l'idée rythmique de l'auteur, mais il lui manquera un élément essentiel : la vitesse. Cet aspect du développement de la musique dans le temps est indiqué au début de l'œuvre ainsi qu'aux endroits où se présente un changement de vitesse. L'indication est une figure de note accompagnée d'un nombre. En général, la note correspond à la pulsation de l'œuvre et le nombre indique combien de fois la pulsation s'articule en une minute. Ainsi, l'indication :

$$\text{♩} = 60$$

signifie qu'en une minute, il y aura 60 pulsations ; en l'occurrence, il suffirait d'une horloge pour calculer la vitesse de l'œuvre, puisque les pulsations correspondent aux secondes. Pour les autres vitesses, on se sert d'un instrument qui marque régulièrement les pulsations : le métronome. Dans le cas du métronome mécanique, il s'agit d'un pendule dont la fréquence d'oscillation se détermine au moyen d'un contrepoids

de position variable ; plus la fréquence est grande, plus on a de pulsations par minute. Les musiciens s'en servent pour s'exercer à la régularité dans le jeu d'un instrument, mais il représente aussi un outil de référence pour que le compositeur puisse donner la vitesse d'exécution d'un morceau. Le premier à établir de cette manière la vitesse d'exécution d'une de ses compositions fut Ludwig van Beethoven.

Mais si le métronome offre une mesure objective de vitesse, il souffre d'un excès de rigidité comme guide d'exécution : dans l'interprétation, une légère élasticité de la pulsation stricte et rigide est fréquente et naturelle. Certaines œuvres font un usage inattendu, quoique pas si rare, du métronome en tant qu'instrument de percussion, comme dans la fameuse chanson des Beatles « Blackbird » du *White Album* du groupe britannique. Le célèbre compositeur de musique cinématographique italien Ennio Morricone inclut des enregistrements distordus et ralentis d'un métronome dans le morceau « Farewell to Cheyenne » de la bande originale du film *Il était une fois dans l'Ouest*.

Le cas le plus extrême de l'utilisation du métronome en tant qu'instrument est celui du Roumain György Ligeti qui, dans son œuvre *Poème Symphonique pour 100 métronomes* (1962), fait fonctionner simultanément cent de ces instruments. Le morceau se termine lorsque le dernier s'arrête.

LA PENDULE DE LA MUSIQUE

Le métronome mécanique fut inventé par l'Allemand Dietrich Nikolaus Winkel en 1812, bien que le brevet appartienne à son compatriote Johann Malzel. S'il existe aujourd'hui des métronomes digitaux, ceux-ci étaient à l'origine des pièces d'horlogerie. Le métronome ordinaire est fait d'un mécanisme d'horlogerie interne et d'un pendule inversé, composé d'une réglette le long de laquelle coulisse un contrepoids. Ce pendule dispose d'un système de double contrepoids de chaque côté



du centre d'oscillation, l'un externe et variable, l'autre interne et fixe. Lorsque le poids est positionné près du centre d'oscillation, la période est plus courte, c'est-à-dire que les oscillations sont plus rapides. S'il se trouve à l'extrémité la plus éloignée, la pulsation marquée sera plus lente. Pour chaque oscillation, le mécanisme interne produit un clic. Sur certains métronomes, il est possible de régler l'instrument pour qu'un son particulier marque les accents toutes les deux, trois ou quatre pulsations. Il existe aujourd'hui des métronomes électroniques qui sont généralement vendus avec un diapason émettant un *la* à 440 Hz.

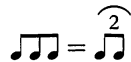
LES DIFFICULTÉS D'EINSTEIN AVEC LES MATHÉMATIQUES

Le physicien Albert Einstein, concepteur de la théorie de la relativité, était aussi un violoniste amateur passionné, bien qu'il n'ait pas fait preuve au violon de la même aisance qu'en sciences. Un jour où le scientifique répétait une sonate en compagnie du célèbre pianiste Artur Schnabel, son compatriote, il manquait à plusieurs reprises un passage de l'œuvre, obligeant Schnabel à s'interrompre. La troisième fois, Schnabel lui lança un regard frustré et s'écria : « Ach, Albert ! Tu ne sais donc pas compter ? »

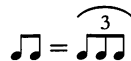
Irrégularités isolées

Parfois, à l'intérieur d'une œuvre de pulsation régulière (par exemple binaire), il est nécessaire d'exprimer ponctuellement quelques pulsations ternaires. Avec les éléments dont nous disposons jusqu'ici, indiquer un changement de cette nature implique de signaler, pour le moment en question, aussi bien un changement de vitesse que de mesure. Pour éviter cette double lecture (et une autre double lecture pour récupérer la régularité), on a créé des duolets, des triolets, etc. :

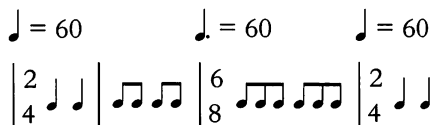
- Duolet : groupe de deux notes qui s'articulent dans un temps correspondant à trois notes.



- Triolet : groupe de trois notes qui s'articulent dans un temps correspondant à deux notes.



Ils s'écrivent avec un arc au-dessus du groupe de figures et un nombre correspondant à leur nouvelle quantité. Voyons un exemple dans une phrase rythmique d'une écriture compliquée, avec changement de mesure et de métronome :



LA MATHÉMATIQUE DES FRACTIONS DE MESURE

Il est intéressant de comparer les équivalences des fractions de mesure avec les nombres fractionnaires et leurs opérations. Jusqu'à quel point des opérations valides avec des fractions sont-elles correctes lorsqu'on les applique à des fractions de mesure ?

- Addition de fractions. Par exemple, une mesure de $3/4$ a une durée d'une blanche pointée, ce qui équivaut à une blanche (que l'on représente au moyen du symbole ♩) plus une noire :

$$\text{♩} = \text{♩} + \text{♩}$$

Si l'on remplace les figures par leurs équivalences numériques, on obtient :

$$3/4 = 1/2 + 1/4.$$

- Simplification de fractions. Si l'on simplifie une fraction de mesure, on obtient un résultat comparable à une nouvelle fraction de mesure :

$$6/8 = 3/4.$$

Dans ce cas, l'égalité numérique ne correspond pas à une égalité musicale. La durée des deux mesures est la même, six croches (dans le cas d'une mesure de $3/4$, trois noires qui équivalent à deux croches chacune). Néanmoins, l'indication $6/8$ correspond à une mesure composée et $3/4$ à une mesure simple, ce qui indique une différence musicale importante.

- Plus petit commun multiple. Parmi les différents cas de polyrythmie, ceux qui nous intéressent ont deux rythmes, un ternaire et l'autre binaire, dans une même pulsation ou mesure. Par exemple, dans une mesure se trouvent deux pulsations de noire, pendant qu'une autre voix exécute trois noires en triolet :

$$\overbrace{\text{♩} \text{♩} \text{♩}}^3 = \text{♩} \text{♩}$$

Pour comprendre l'exécution simultanée de ces deux rythmes, la solution est mathématique. Le processus revient à calculer le plus petit commun multiple (PPCM) de 2 et 3, qui vaut à 6. Il reste alors à imaginer la mesure divisée en six temps égaux, numérotés de 1 à 6 : les noires sont jouées sur les temps 1 et 4, tandis que les notes du triolet sont jouées sur 1, 3 et 5.

La même écriture est cette fois-ci simplifiée par l'utilisation de triolets :

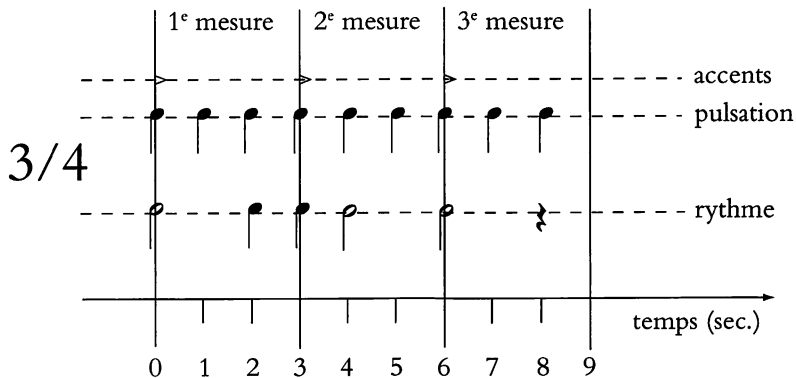


La notation moderne

Au cours des siècles, la notation musicale en tant que procédé symbolique a atteint un remarquable degré d'efficacité. Pour parvenir à son objectif, elle place des éléments variables (notes et silences) et des constantes (temps, clé, mesure) sur un système de référence (portée). Voyons un exemple complet.

La vitesse est constante : $\text{♩} = 60$.

La pulsation est d'une noire et, toutes les deux noires sans accent, se trouve une pulsation accentuée, c'est pourquoi nous aurons une mesure de 3/4. Dans le graphique ci-dessous, la séquence de pulsations et d'accents est indiquée comme si la partition était un système de coordonnées, avec le temps exprimé en secondes sur l'abscisse.



Les accents tombent régulièrement à des intervalles de 3 secondes.

Les pulsations tombent régulièrement à des intervalles d'une seconde.

La lecture de toute cette information à partir du graphique précédent est extrêmement fastidieuse et la partition d'un rythme recourt à des clés qui permettent de la simplifier. Pour cela, on indique au commencement et une seule fois les valeurs constantes : pulsation et accent et, par conséquent, mesure par le biais du système déjà vu des fractions ; dans notre exemple, 3/4.

La vitesse est donnée au moyen de l'indication métronomique : $\text{♩} = 60$.

En gardant l'idée d'horizontalité du déroulement temporel de gauche à droite, comme dans l'écriture occidentale de textes, nous pouvons à présent ajouter des lignes verticales qui indiquent la fin de chaque mesure, et le graphique du rythme précédent est encore simplifié :

$$\text{♩} = 60$$

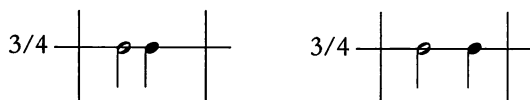
$$3/4 \quad | \text{♩} \quad \text{♩} \quad | \text{♩} \text{♩} \quad | \text{♩} \quad \text{♩} \quad |$$

Avec l'introduction des lignes verticales et sachant que les pulsations ont lieu régulièrement, il n'est pas indispensable que les notes soient placées en respectant une échelle de temps.

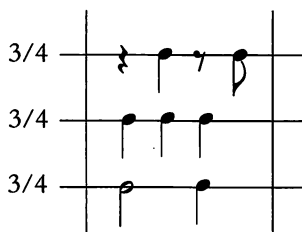
Hors échelle

L'écoulement du temps sur la ligne horizontale d'une partition n'est pas à l'échelle. Cela signifie que la durée des notes ou des silences ne correspond pas nécessairement à l'espacement des figures, mais au contenu de celles-ci. L'articulation d'un son doit être réalisée en tenant compte de la durée qu'établit la note ou le silence, et non en fonction de sa proximité graphique.

Ces deux mesures sont identiques :



Il est néanmoins important de savoir que, lorsqu'on dessine deux lignes musicales ou plus qui s'interprètent simultanément, il est conseillé d'aligner verticalement les notes qui s'articulent au même moment pour en simplifier la lecture. Ainsi, une représentation graphique correcte de trois phrases rythmiques simultanées s'indiquera de la manière suivante :



Chapitre 3

La géométrie de la composition

Le vase donne une forme au vide et la musique, au silence.

Georges Braque

On m'accuse d'être un mathématicien.

Je ne suis pas mathématicien, je suis géomètre.

Arnold Schönberg

La manière qu'a la nature d'organiser les formes est curieuse. Le regard systématique que portent les mathématiciens sur les formes dans l'univers leur fait découvrir des modèles numériques et géométriques qui décrivent des plantes, des animaux, des sons et des structures cristallines. Les formes sphériques, les séquences cycliques et des ordonnancements hélicoïdaux y sont fréquents, de même que les symétries. Les artistes se nourrissent des organisations capricieuses de la nature pour ordonner la matière selon un autre ordre, celui de l'esthétique.

La musique fait naître des images dans l'esprit de ceux qui l'écoutent. Les mélodies sont souvent associées à un dessin avec ses points et ses courbes. Nous avons l'habitude de penser à certaines caractéristiques musicales comme si elles existaient dans l'espace : les sons aigus se visualisent en haut avec un aspect ténu et les graves, au contraire, en bas et épais. Cette sensation de position haute et basse se reflète d'une certaine manière sur la partition. Par exemple, on dira d'une mélodie de plus en plus aiguë qu'elle est « ascendante ».

Cela donne à la partition une autre dimension, associant une image à la musique, un peu comme dans le cas d'une histoire illustrée. Plusieurs compositeurs en ont tenu compte en composant leurs œuvres et il existe dans l'histoire de la musique de nombreux exemples dans lesquels on reconnaît des structures intéressantes, à cheval entre la musique, l'écriture et la géométrie (pour mieux apprécier les exemples exposés dans ce chapitre, nous vous recommandons de voir les éléments fondamentaux de la notation musicale moderne, rassemblés en annexe I).

Hauteur + rythme : le plan musical

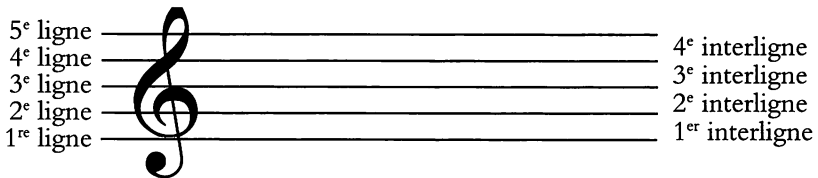
Les éléments de l'écriture musicale

Le système actuel d'écriture musicale est le fruit d'un processus historique dont le but est de mettre noir sur blanc un art éthéré. Tout au long de ce processus se sont incorporés et modifiés une série de signes et d'éléments graphiques qu'il est intéressant d'évaluer du point de vue de la logique mathématique.

La portée

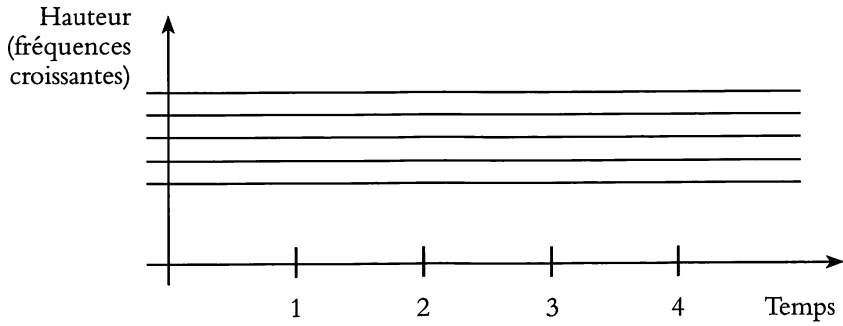
La portée est un moyen de représenter graphiquement la musique. Elle montre comment la hauteur des sons évolue dans le temps. En le comparant à un système de coordonnées, l'axe horizontal décrira le « temps » et l'axe vertical, les « hauteurs ». Celles-ci seront indiquées sur une série de droites parallèles et équidistantes, qui, à l'heure actuelle, sont au nombre de cinq.

La « distance musicale » entre deux lignes ou deux interlignes consécutifs est un intervalle de tierce, et entre une ligne et l'interligne suivant, un intervalle de seconde. On obtient ainsi cinq lignes et quatre interlignes, que l'on appelle, de bas en haut :

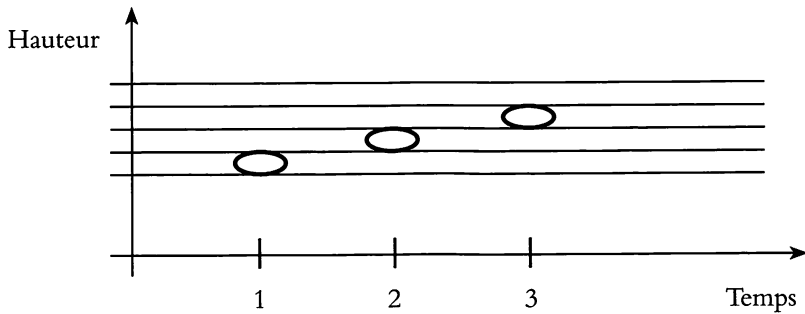


La distribution des lignes et des interlignes est la même que celle des touches blanches d'un piano et leur rang est directement proportionnel aux fréquences des notes. Ainsi, les sons de plus haute fréquence, les plus aigus, se placent sur la portée en position la plus haute. Pour écrire des notes plus aiguës ou plus graves, on ajoute des lignes supplémentaires. Ceci crée évidemment des interlignes supplémentaires. En fait, les espaces au-dessus de la cinquième ligne et en dessous de la première ligne sont déjà des interlignes additionnels.

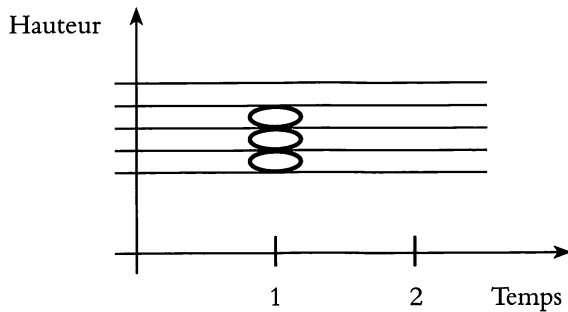
En reprenant l'idée de la partition comme système de coordonnées dans le « plan musical », la position de la note sur l'axe des ordonnées détermine sa hauteur.



La position sur l'axe des abscisses détermine la durée du son ou du silence. Par exemple, trois sons de hauteur croissante, joués aux instants 1, 2 et 3, sont représentés de la manière suivante :



Si ces trois sons étaient produits simultanément à l'instant 1, on les représenterait ainsi :



En résumé, nous dirons que les sons sur une même ligne ou interligne de la portée, donc ceux qui sont alignés horizontalement, ont une hauteur ou fréquence égale, alors que ceux qui sont indiqués sur un même instant dans le temps et sont alignés verticalement, sont simultanés.

Les notes

Les notes de musique sont un code qui indique la durée du son qu'elles représentent. Elles sont dessinées avec une « tête », un petit ovale blanc ou noir, une « hampe », ou segment vertical avec la tête d'un côté de la hampe et, de l'autre, le « crochet », une petite ligne incurvée.



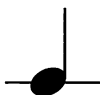
Dans l'ordre décroissant de la durée, on trouve : la ronde, la blanche, la noire, la croche, la double-croche, la triple-croche et la quadruple-croche. La note de base est la ronde et on lui donne une durée de valeur 1. Pour les autres, la valeur de chacune est la moitié de celle qui la précède. On trouve ensuite la blanche, qui dure donc la moitié d'une ronde. Cela revient à dire qu'on peut jouer deux blanches pendant le temps que dure une ronde ; durant une blanche, on peut jouer deux noires. La même relation binaire se répète pour les autres notes :

Nom	Note	Durée relative à la ronde
Ronde	●	1
Blanche	⌒	1/2
Noire	⌒	1/4
Croche	♩	1/8
Double-croche	♪	1/16
Triple-croche	♫	1/32
Quadruple-croche	♬	1/64

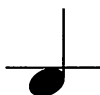
La fonction et les propriétés des notes sont détaillées en annexe I, sous le titre « La musique et ses symboles ».

Écrire les hauteurs

Jusque-là, l'information est partielle : pour connaître la hauteur absolue des sons, une clé est nécessaire.



Note sur une ligne



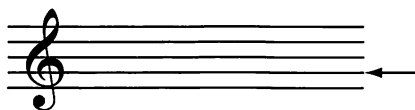
Note sur un interligne

La hauteur à laquelle le son est produit (le ton) est représentée par la position de la tête de la note sur la portée, que ce soit sur une ligne ou sur un interligne.

Les clés

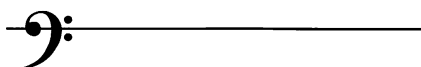
Dans le chapitre précédent, nous avons vu que pour déterminer la vitesse et le rythme, il faut donner une indication métronomique et une fraction de mesure au début de la partition. De la même manière, il faut mettre une clé au début de la portée pour déterminer sans équivoque la hauteur des sons.

La clé la plus utilisée est la clé de *sol*. La présence de ce signe en début de portée, comme on le voit sur la figure, indique que toute note dont la tête est sur la deuxième ligne, est un *sol*.

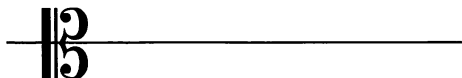


En descendant la gamme, le premier interligne sera un *fa*, la première ligne un *mi*, etc. En montant, au deuxième interligne, on trouve le *la*, à la troisième ligne, le *si*, au troisième interligne, le *do*, etc. La ligne du *sol* est celle par laquelle passe le point central de la clé, d'où démarre le dessin.

Une autre des clés employées est celle de *fa*. C'est une spirale qui situe le *fa* à la ligne où se trouve son point central. Cette position de la ligne est confirmée par un point au-dessus de la ligne et un autre en dessous :



La clé de *do* est un signe symétrique dont l'axe de symétrie est la ligne désignée comme *do* :

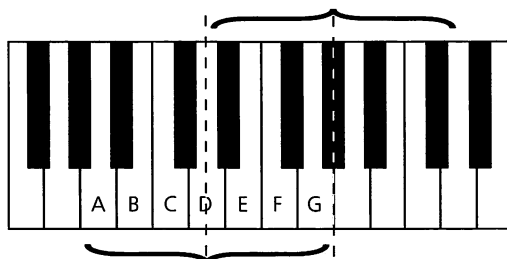


Selon la position où sont placées les clés, la hauteur de chaque ligne et de chaque interligne est modifiée. Ainsi, une même position donne des notes différentes en fonction de la clé utilisée.



SYMÉTRIES SUR LE CLAVIER

Le clavier du piano présente visuellement deux axes de symétrie : l'un est la touche blanche du *ré* et l'autre, la touche noire du *sol dièse*. Dans la nomenclature utilisée en Europe centrale (ABCDEFG), la note centrale se trouve en D (*ré*), et les six autres notes se trouvent réparties de part et d'autre de cet axe de symétrie.



Voyons comment se répartissent les tons et demi-tons dans les gammes. On appelle « gamme majeure » la suite de sept sons séparés entre eux par des tons (T) et des demi-tons (dT), de la manière suivante :

T-T-dT-T-T-dT

La gamme majeure qui n'utilise que les touches blanches est celle qui commence par *do* :

do, ré, mi, fa, sol, la, si

Voyons maintenant comment un même son est représenté dans trois clés différentes :



Clef de *sol*
sur la 2^e ligne



Clef de *fa*
sur la 4^e ligne



Clef de *do*
sur la 3^e ligne

La figure de la page précédente présente une note sur la même ligne de portée, définie par des clés différentes. Ci-dessus, un seul son est représenté dans trois clés différentes.

On appelle « gamme mineure naturelle » la suite de sept sons séparés entre eux par des tons et des demi-tons, de la manière suivante :

T-dT-T-T-dT-T

La gamme mineure qui n'utilise que les touches blanches est celle qui commence par *la* :

la, si, do, ré, mi, fa, sol

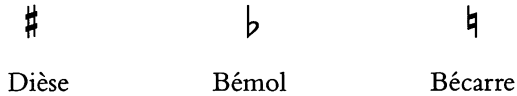
C'est la symétrie avec l'axe en *ré* que nous avons repérée sur le clavier. Il est facile de voir que les tons et les demi-tons se répartissent symétriquement.

la — I — *si* dI — *do* — I — *ré* — I — *mi* dI — *fa* — I — *sol*

Entre le *sol* et le *la* qui le suit, on trouve l'autre axe de symétrie : la symétrie des intervalles entre les touches par rapport à cet axe est évidente. La répartition des touches noires et blanches par rapport aux axes de symétrie que l'on voit facilement sur le clavier se retrouve dans la distribution des tons et des demi-tons. Notre environnement sonore est constitué d'une suite de douze demi-tons égaux. En prenant n'importe quelle note comme centre, on trouvera des notes dont la répartition en tons et demi-tons sera symétrique par rapport à ce centre. Mais dans ce cas particulier, cette symétrie se retrouve sur le clavier du piano.

Faire varier d'un demi-ton

Il est parfois nécessaire de changer la hauteur d'une note. Il existe deux signes qui augmentent ou diminuent la hauteur du son d'un demi-ton : le dièse # l'élève et le bémol b le descend. Le troisième signe, le bémol b, annule l'effet du dièse ou du bémol.



Ces signes sont placés sur la ligne ou l'interligne de la note qu'ils modifient et altèrent tous les sons placés à sa droite pendant tout le reste de la mesure. Les dièses, bémols et bémols placés entre la clé et la fraction de mesure au début d'un morceau, indiquent que les hauteurs des notes placées sur la ligne ou dans l'interligne désignés, sont altérées sur toute la durée du morceau ou jusqu'à l'apparition d'une nouvelle altération.

La courbe mélodique

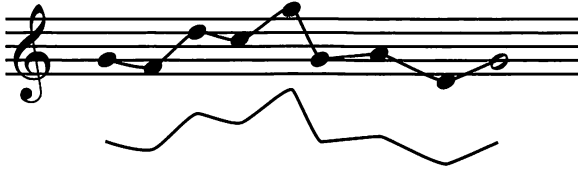
La mélodie évoque souvent pour celui qui l'écoute, même s'il ne sait pas vraiment lire ou écrire la musique, une ligne avec des segments courbes ou droits, parfois ascendants, parfois descendants. Il est possible de « lire » cette courbe, de gauche à droite, comme s'il s'agissait d'un texte écrit. Certaines mélodies se présentent comme des courbes douces, sans à-coup, d'autres, en revanche, montrent des variations marquées de hauteur. Il est intéressant d'observer qu'il existe une certaine correspondance entre l'image qu'évoque une mélodie, et le dessin qu'on peut réaliser avec les notes sur la portée. Prenons une partition et, comme dans ce jeu où il faut réunir les points, relier les têtes des notes par une ligne continue :



Une mélodie douce et la courbe qui la représente.

Si l'on pouvait mettre en musique la ligne légèrement ondulée de l'exemple ci-dessus, on obtiendrait une mélodie sans à-coup. De la même manière, une mélodie

présentant de grands sauts donnerait une courbe avec des variations de hauteurs similaires, comme sur la figure ci-dessous :



Une mélodie avec grandes variations de hauteur.

Transformations géométrico-musicales

Selon l'école de psychologie de la Gestalt (terme que l'on peut traduire par « forme », « structure », ou encore « configuration »), l'esprit est capable de choisir et de regrouper les parties d'un tout et de les ordonner selon une forme qui se différencie du reste. Ce même processus se produit dans le temps grâce à la mémoire, ce qui nous permet d'observer le mouvement d'une séquence de dessins animés ou d'apprécier la construction d'une œuvre musicale. La Gestalt a étudié les processus de la perception et elle a établi certaines lois qui la caractérisent. Selon la loi de clôture, l'esprit humain tend spontanément à compléter des formes incomplètes. Ainsi, des images avec une information partielle, comme les paysages impressionnistes, faits de milliers de coups de pinceaux distincts qui, regardés d'une certaine distance, donnent magiquement l'impression d'un tout continu et vraisemblable. La pellicule d'un film en est un autre exemple, avec ses images figées qui, mises en mouvement continu, construisent une (belle) illusion mentale. Les lois de la Gestalt s'appliquent de même à la musique et permettent à l'auditeur d'identifier des modèles et des similitudes entre événements sonores qui se succèdent dans le temps, de manière similaire à celle d'un spectateur qui visionne les images d'un film.

Divers compositeurs ont utilisé délibérément de nombreuses notions de géométrie comme outils de composition. Dans certains cas, l'aspect géométrico-musical se manifeste visuellement sur la partition, et dans d'autres, directement dans la mélodie. La forme de certaines compositions, comme le canon, présente des curiosités géométriques. Elle conditionne même fortement les mélodies, ce qui présente un double défi pour le compositeur, qui cherche la beauté de la composition tout en respectant des critères mathématiques stricts.

D'autres œuvres reflètent l'usage délibéré d'une transformation géométrique dans leur composition.

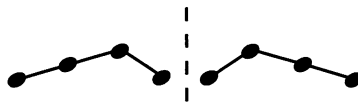
Dans cette partie, nous allons décrire différentes transformations géométriques et les comparer avec certaines combinaisons de sons particulières. Lorsqu'on effectue ces comparaisons, il faut garder à l'esprit une différence fondamentale : dans le plan, les deux dimensions correspondent à une même grandeur, alors que ce n'est pas le cas sur la portée. Cette particularité oblige à appliquer les transformations musicales séparément dans les deux dimensions, hauteur et temps.

On peut aussi appliquer ces transformations aux notes elles-mêmes, comme s'il s'agissait de figures géométriques du plan, mais cela ne génère pas toujours des différences perceptibles.

De même, il faudra bien prendre en compte le fait que les transformations seront appliquées sur la courbe formée par les têtes des notes. Prenons l'exemple suivant d'une mélodie de quatre notes, qui, reliées par des droites, donnent le dessin suivant :



Après lui avoir fait subir une transformation...



On replace les hampes et les crochets correspondants :



Les transformations géométrico-musicales constituent des outils supplémentaires de composition, mais savoir en user avec subtilité, grâce et sens musical, est l'apanage exclusif et nécessaire du compositeur.

Transformations isométriques

« Isométrique » signifie « qui respecte les distances ». Il existe trois transformations isométriques dans le plan, qui ont leur équivalent dans le domaine musical : la *translation*, la *réflexion* et la *rotation*. Le nombre de transformations augmente en les appliquant séparément à la hauteur ou au temps. Le tableau suivant les résume avant d'en aborder les détails :

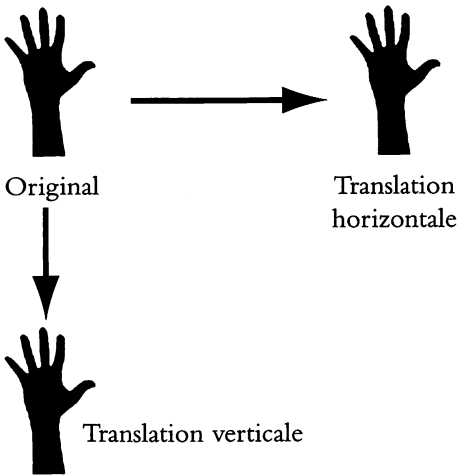
Transformation géométrique	Transformation musicale		
	Horizontale	Verticale	Horizontale + verticale
<i>Translation</i>	1. Répétition 2. Canon	Transposition	1. Ostinato 2. Canon à la seconde, à la quarte, etc.
<i>Réflexion</i>	Inversion	Rétrogradation	
<i>Rotation</i> (à 180°, en tant que combinaison de deux réflexions)			Inversion rétrograde

Le nombre des variantes possibles augmente par combinaison de certaines de ces transformations :

Combinaison de transformations	Transformation musicale
<i>Translation verticale + Réflexion verticale</i>	Transposition rétrograde
<i>Translation verticale + Réflexion horizontale</i>	Transposition inversée

Translations

La translation est une transformation géométrique dont l'application entraîne un déplacement de la figure concernée dans une direction, sans modification de forme ni rotation. Dans notre cas, on considérera seulement les translations horizontales et verticales, comme illustrées sur la figure ci-contre.



Translation horizontale : la répétition et le canon

La translation horizontale correspond, dans le cas d'une mélodie, à un déplacement dans le temps, qui donnera lieu à deux effets musicaux :

- la répétition : une mélodie ou un fragment sont interprétés plusieurs fois, l'un à la suite de l'autre :

O → O → O → O → O → O → O → O → O

Le cas le plus simple de la translation horizontale est la répétition d'un motif, prolongeant la ligne mélodique.



Mélodie
originale

Mélodie tradatée
horizontalement

- Le canon : comme on l'a vu dans le chapitre précédent, c'est une structure musicale où la mélodie est reprise par plusieurs voix, simultanément, chacune des voix commençant quelques temps après la précédente.

voz 1 →	A	B	C	D	...
voz 2 →		A	B	C	...
voz 3 →			A	B	...

Prenons à titre d'exemple le canon très connu de la comptine *Frère Jacques*. Si l'on prend les quatre premières croches comme mélodie originale, on observe que cette mélodie se répète (translation). Une fois passée cette première phrase musicale, la mélodie continue sur les mesures suivantes pendant que commence une réplique de la mélodie originale (dans notre exemple, on utilise une autre portée pour visualiser chaque voix indépendamment l'une de l'autre). À partir de là, les deux mélodies, l'originale et sa réplique tradatée, progressent simultanément en se chevauchant constamment.

Regardons les quatre premières mesures :



Ces deux cas de translation horizontale se produisent dans le temps. Un troisième cas de translation modifie verticalement la position des notes sur la portée : c'est la « transposition ».

UNE BERCEUSE UNIVERSELLE

L'origine de la mélodie *Frère Jacques* est sujette à controverse, de même d'ailleurs que ses paroles. Il est fort probable que, sous le titre de « Frère Blaise », sa première version écrite remonte à la fin du XVIII^e siècle. Pourtant, certains chercheurs ont remarqué des ressemblances évidentes entre cette chanson et une pièce écrite en 1615 par l'Italien Girolamo Frescobaldi. Certains ont aussi vu dans ses paroles, « Frère Jacques, frère Jacques / Dormez-vous ? Dormez-vous ? / Sonnez les matines ! Sonnez les matines ! [...] », une moquerie à l'intention des protestants, des Juifs et même de Martin Luther. D'autres y ont lu une critique de la mollesse des moines jacobins, considérés en France comme des profiteurs du clergé. Cette berceuse a été traduite dans la plupart des langues occidentales et se chante dans le monde entier, tant et si bien qu'une enquête récente rapporte que des écoliers chinois pensaient qu'elle faisait partie de leur patrimoine.

Translation verticale : la transposition

Une translation isométrique sur l'axe vertical donne lieu à une transposition. On obtient la même mélodie mais dans les tons plus aigus ou plus graves, selon qu'elle se fait vers le haut ou vers le bas de la portée :



Mélodie originale



Mélodie transposée
d'une quinte ascendante

La transposition mélodique justifierait un exposé plus approfondi. L'exemple choisi illustre le principe élémentaire de la transposition.

Les exemples suivants, extraits d'œuvres et de styles différents, montrent les utilisations les plus spécifiques de la translation en composition. Dans la *Sonate op. 27 n° 2*, connue sous le nom de *Sonate au clair de lune*, Ludwig van Beethoven (1770-1827) utilise un arpège répété de trois notes comme générateur de texture.



En musique rock, les *riffs* sont des mélodies rythmiques brèves, généralement jouées par la guitare, qui sont répétées en continu. C'est le cas dans le morceau (*I Can't Get No*) *Satisfaction*, des Rolling Stones, dont les *riffs* sont parmi les plus fameux de l'histoire.



La répétition insistante de n'importe quel élément musical, comme dans les deux cas cités précédemment, a reçu le nom d'« ostinato ».

En ce qui concerne les répétitions les plus élaborées propres aux canons, nous donnerons un exemple emprunté au plus grand des maîtres dans ce domaine, Jean-Sébastien Bach (1685-1750). Bach a exploité ce procédé de manière très ingénieuse. Son habileté était telle qu'il avait l'habitude de composer et d'offrir de courtes œuvres en canon écrites et dédiées pour l'occasion. Ici, il s'agit du *Canon a 2, perpetuus* BWV 1075, une petite œuvre de huit mesures, composée pour deux voix, décalées de deux mesures. En raison de sa structure, l'œuvre entre dans un cycle qui pourrait durer éternellement :



Ci-dessous, le canon complet :



L'un des canons les plus fameux est probablement celui que l'on doit au compositeur allemand Johann Pachelbel (1653-1706). Son canon en *ré* gagna en popularité grâce au film *Des gens comme les autres* (1980) qui en fit son thème. Il est écrit à la fois comme un canon et une chaconne, et combine donc les deux types de translations horizontales.



La chaconne est un thème avec variations, où la basse répète inlassablement le même fragment sur lequel les autres voix viennent tisser leurs variations. Dans le cas présent, ces dernières sont interprétées par les trois voix supérieures en canon, selon une structure dont Pachelbel tire habilement profit. Sur une cadence harmonique qui se répète cycliquement (et qui a été réutilisée nombre de fois au cours de l'histoire), le climat de la pièce s'installe progressivement, sans à-coup, allant et venant entre paysages paisibles et mélancoliques ou rayonnants et euphoriques.

On peut également citer la *Pavane* op. 50 du compositeur Gabriel Fauré (1845-1924), qui commence par un premier motif répété deux fois (pendant la mesure 1 et la moitié de la mesure 2) par les violoncelles, les altos et les seconds violons.

The image shows a musical score for five staves: 1^{er} violons, 2^{es} violons, Altos, Violoncelles, and Contrebasses. The key signature is one flat (B-flat) and the time signature is common time (C). The 1^{er} violons staff has a whole rest. The 2^{es} violons staff starts with a 'pizz.' (pizzicato) marking and a melodic motif. The Altos, Violoncelles, and Contrebasses staves also show this motif at lower registers, illustrating a diagonal translation of the same melodic idea across the orchestral texture.

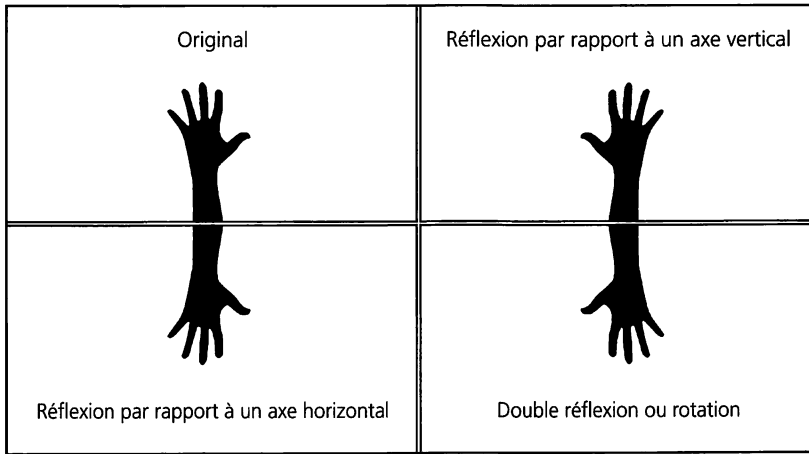
Le deuxième exemple est tiré de la célèbre *Symphonie n° 5 en do mineur* op. 67 de Ludwig van Beethoven (1770-1827). On y observe une translation en diagonale, combinant translation verticale et horizontale. Sur la portée correspondant à la voix supérieure, surlignée sur la partition ci-dessous, un même motif mélodique qui dure une mesure se répète en s'enchaînant, transposé vers le haut.

The image shows a musical score for five staves, likely from the first movement of Beethoven's Symphony No. 5. The key signature is three flats (E-flat major/C minor) and the time signature is common time (C). The top staff is marked 'cresc.' and features a melodic motif that is repeated and transposed upwards in each subsequent measure, creating a diagonal line of the same motif across the staves. The other staves also show rhythmic patterns that complement the main melodic line.

Réflexions

La réflexion est une transformation qui change l'image en l'inversant, comme un reflet dans un miroir. La réflexion donne une copie chirale de la figure originale, c'est-à-dire qu'une simple rotation ne suffit pas à la retrouver (comme l'image dans un miroir d'un homme qui porte un bandeau sur l'œil droit, par exemple).

La chiralité originale se retrouve néanmoins lorsqu'on réalise une double réflexion, en faisant se refléter le reflet dans un second miroir. Nous allons examiner deux types de réflexions, par rapport à un axe horizontal et par rapport à un axe vertical. La combinaison des deux donne une rotation à 180°, comme on peut le voir sur la figure suivante :



En appliquant des réflexions aux thèmes musicaux, on obtient des thèmes « inversés » ou « rétrogrades » par rapport aux thèmes originaux.

Réflexion par rapport à un axe vertical : mouvement rétrograde

C'est lorsque la mélodie est réécrite en commençant par la fin et que les notes se succèdent dans l'ordre inverse de la mélodie originale.



Mélodie originale



Mouvement rétrograde

Si l'on joue les deux mélodies, l'originale et la rétrograde, à la suite l'une de l'autre, on est dans le cas d'une « symétrie mélodique » et comme elle est horizontale, on pourrait l'appeler « palindrome mélodique ».



Mélodie symétrique

A N I L I N A

Palindrome

Un exemple très connu est l'« Alléluia » de l'oratorio *Le Messie*, de Georg Friedrich Haendel (1685-1759).

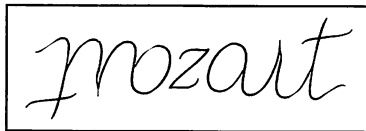


La même symétrie se retrouve au début de la célèbre chanson *I've got Rhythm*, du compositeur de génie George Gershwin (1898-1937) :



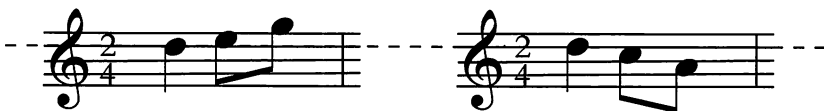
LES AMBIGRAMMES

Les nombres et les mots palindromes sont des exemples notoires de symétries. On connaît moins les ambigrammes, qui représentent un texte dessiné de telle manière qu'en lui appliquant une transformation (réflexion, rotation, etc.), on retrouve le même texte ou un autre qui a une relation avec l'original. L'exemple montre un ambigramme du nom de Mozart que l'on doit à l'Américain Scott Kim.



Réflexion par rapport à un axe horizontal : inversion

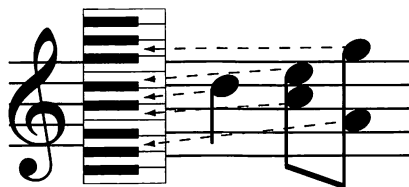
Voici l'inversion d'une mélodie simple, qui se reflète horizontalement par rapport à l'axe horizontal de la ligne du *ré* :



Mélodie originale

Inversion

Il saute aux yeux, sur le graphique suivant, que ces mélodies jouées simultanément sur le clavier d'un piano sont symétriques par rapport au *ré*.



Fauré a utilisé une réflexion verticale pour la structure de base de l'*Agnus Dei* de sa « Messe basse ». Dans les premières mesures, les deux premières croches se reflètent pour terminer la mesure :



Durant tout ce passage du *Quatuor à cordes en sol mineur* op. 10 du compositeur Claude Debussy (1862-1918), le premier violon et l'alto jouent en alternance un mouvement contraire, en miroir, et un mouvement parallèle :



La deuxième mesure du refrain du morceau *Samba de una nota sola* du compositeur brésilien Antonio Carlos Jobim (1927-1994) est une rotation à 180° de la première :



Les vingt-quatre caprices du violoniste et compositeur italien Niccolò Paganini (1782-1840) ont inspiré de nombreuses variations dont les plus connues sont sans doute celles de Sergéï Rachmaninov (1873-1943). Le *Caprice n° 24*, en particulier, inspira au compositeur russe une version symétrique (inversée) :

Paganini
(Fragment du *Caprice n° 24*)

Rachmaninoff
(*Inversion* : variation n° 18)



Dans certains cas, comme pour la sixième des « *Six unison melodies* » du *Microkosmos* de Béla Bartók (1881-1945), les mélodies gardent une symétrie en hauteur mais pas en durée. L'axe de symétrie se situe sur la première note (*do*) de la deuxième partie. Il a été entouré d'un cadre pointillé sur la figure suivante :



Dans l'exemple suivant, on voit que les deux mains travaillent symétriquement par rapport au *si bémol* du début de la première mesure.



Rotations

Rappelons qu'une rotation de 180° est équivalente à une inversion rétrograde. C'est la seule qui ait un sens en musique, car il existe une certaine corrélation entre le concept géométrique et ce qu'on perçoit de l'exercice musical. En revanche, une rotation simple de 90° n'a pas vraiment de sens musicalement, comme on peut le voir dans la figure suivante :



Comme en géométrie, une rotation de 180° peut se concevoir comme une double inversion, horizontale puis verticale.



Mélodie originale



Inversion rétrograde

Le génie de Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) ressort dans une œuvre relativement peu connue. Il s'agit d'un canon réversible, une œuvre écrite pour deux violons, dont les mélodies sont déduites l'une de l'autre par une rotation à 180° . Si l'on conçoit la rotation comme une double réflexion, Mozart s'est amusé à faire une réflexion horizontale par rapport à la ligne du *si*. La partition est écrite sur une seule portée, avec une seule ligne mélodique et des clés de sol inversées de chaque côté de la portée, ce qui fait que, pour la jouer, les interprètes peuvent se mettre face à face, la partition entre les deux. Ainsi, un *sol* pour l'un est un *ré* pour l'autre, un *la* devient *do*, le seul invariant pour les deux étant le *si* :

Der Spiegel (The Mirror) Duet

VIOLIN I *Allegro* ♩=120 attrib. to W.A. Mozart

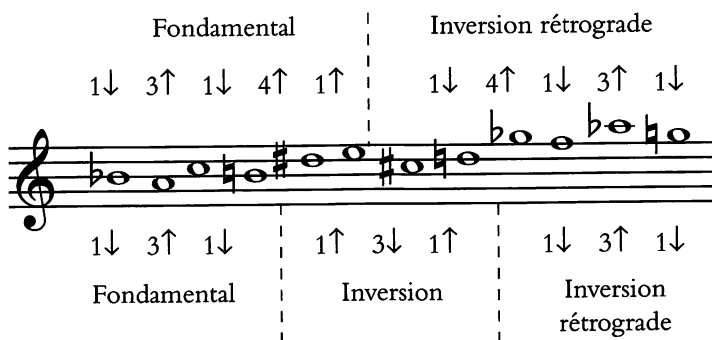
Public Domain. Sequenced by Fred Nachbaur using NoteWorthy
Confused? Try playing this from opposite sides of a table.

Allegro

*Deux violonistes peuvent jouer le Miroir de Mozart en lisant la même partition
en sens inverse, l'un en face de l'autre.*

Le compositeur autrichien Anton Webern (1883–1945) est un personnage clé de la musique dodécaphonique, qui a marqué profondément la musique académique du début du ^{xx}e. Dans son *Quatuor pour cordes* op. 28, l'auteur commence par établir

une série de sons sur lesquels vont s'appuyer les relations d'intervalles. Dans ce morceau, on peut observer un motif fondamental, son motif rétrograde et son motif inverse. La suite de notes présente en plus, en son milieu, une symétrie rétrograde et une inversion.



Suite de douze notes du Quatuor pour cordes op. 28 de Anton Webern. Les nombres indiquent les demi-tons de chaque intervalle. Les flèches indiquent si l'intervalle est ascendant ou descendant.

Combinaisons

Les transformations précédentes ont été combinées de manière ingénieuse dans diverses œuvres musicales au cours de l'histoire. Elles constituent une panoplie d'outils pour la création et certaines de leurs caractéristiques peuvent varier : la position de l'axe de symétrie des réflexions, la distance en intervalles des translations verticales ou la distance horizontale des entrées de voix dans les canons.

L'idée du canon, basée sur l'imitation d'une voix par une ou plusieurs voix, a été reprise et enrichie par d'autres types d'imitations, faisant appel à des symétries ou des mouvements rétrogrades particulièrement originaux.

Translation horizontale plus translation verticale : le canon à intervalles

L'idée même du canon est de déplacer horizontalement le départ de la deuxième voix. Si l'on ajoute à cette translation un déplacement vertical, on obtient un canon dont les entrées se font à d'autres intervalles : la deuxième voix va commencer la mélodie à une note différente de celle par laquelle débute le motif original. Cela oblige à modifier certains tons et demi-tons, ce qu'on appelle « réponse tonale ». On classe les canons selon l'intervalle auquel entre la seconde voix et on parlera alors de canon à l'unisson s'il n'y en a pas, canon à la seconde si les notes de départ sont séparées d'une seconde, à la tierce, etc.

Translation verticale plus réflexion par rapport à un axe vertical :**transposition rétrograde**

Cette combinaison effectue une transposition de la mélodie originale puis un mouvement rétrograde.



Mélodie originale



Transposition

Transposition et
mouvement rétrograde**Translation verticale plus réflexion par rapport à un axe horizontal :****transposition inversée**

Il faut ici transposer la mélodie à une autre note puis effectuer l'inversion. Ces deux opérations peuvent se résumer à une seule symétrie en choisissant correctement son axe.



Mélodie originale



Transposition à la quinte



Transposition inversée

Ici, une translation verticale suivie d'une réflexion horizontale, avec l'axe en si.



Mélodie originale



Inversion

*Même résultat que précédemment, mais en appliquant
cette fois une seule réflexion avec l'axe en sol.*

The Lamb, œuvre du compositeur anglais contemporain John Tavener, combine certaines de ces transformations qui donnent cette belle chorale, qu'il composa pour son neveu de trois ans. Musicalement, c'est un jeu de symétries : la première mesure est une mélodie qui se répète à la seconde mesure (translation), mais cette fois accompagnée d'une seconde voix qui n'est autre que son inversion (symétrie

par rapport à un axe horizontal), l'axe étant ici en *sol*. La troisième mesure est une nouvelle phrase musicale qui se termine à la quatrième mesure par sa version rétrograde (symétrie par rapport à un axe vertical). La cinquième et sixième mesure reprend la mélodie des mesures 3 et 4, en lui rajoutant sa version symétrique (symétrie horizontale) en seconde voix. Ainsi, la mélodie de la seconde voix de la mesure 6 est une rotation à 180° de la version originale de la première voix de la mesure 4.

for Simon's 3rd birthday

The Lamb

William Blake

John Tavener

With extreme tenderness— flexible— always guided by the words (♩ = c. 40)

SOPRANO
p Lit - tle lamb, _ who _ made thee? Dost thou know _ who _ made thee?

ALTO
p Dost thou know _ who _ made thee?

[moving forward]

Gave thee life, and bid thee feed By the stream and o'er the mead;

poco

Gave thee cloth - ing of de - light, Soft - est cloth - ing, wool - ly, bright;

Gave thee cloth - ing of de - light, Soft - est cloth - ing, wool - ly, bright;

Poco meno mosso

S. *pp* Gave thee such a ten - der voice, Mak - ing all the vales re - jice?

A. *pp* Gave thee such a ten - der voice, Mak - ing all the vales re - jice?

T. *pp* Gave thee such a ten - der voice, Mak - ing all the vales re - jice?

d. *pp* Gave thee such a ten - der voice, Mak - ing all the vales re - jice?

Les intervalles entre chaque note de la mélodie sont strictement conservés, mais le compositeur, pour des raisons esthétiques, a modifié la durée de la dernière note de chaque phrase. L'effet de symétrie ne se perd pas pour autant, car la ligne mélodique se construit dans l'esprit comme une courbe réunissant les attaques des sons, indépendamment du fait que les notes soient brèves ou soutenues.

LE SCEAU DE BACH

Jean-Sébastien Bach a conçu lui-même son propre sceau, parfaitement symétrique. C'est un ensemble visuel symbolique, formé de trois éléments fondamentaux : la couronne qui représente Dieu ; les trois initiales de son nom, JSB, telles quelles et en miroir, et enfin, en combinant le reflet du J avec le S, apparaît la lettre grecque χ , qui représente la croix et qui est l'initiale de « Christ » en grec. Celle-ci apparaît dans les deux symétries et une troisième fois en combinant les deux S.



Le *Canon Concordia Discors*, BWV 1086 de Bach est un exemple d'inversion avec la ligne du *mi* comme axe de symétrie. Si nous voulions « classer » cette œuvre, nous dirions que c'est un cas de réflexion par rapport à un axe horizontal, combinée à une translation (canon).



Certaines compositions de Bach présentent une codification qui oblige à les déchiffrer avant de pouvoir jouer le canon. Dans le morceau BWV 1073 du catalogue, le compositeur n'a écrit qu'une seule mélodie mais en quatre clés. Chacune des clés attribuant une hauteur donnée aux notes de la portée, la mélodie est différente pour chaque clé. En suivant l'ordre d'apparition des clés, la mélodie commence par un *do*, puis un *sol*, puis un *ré* et enfin, un *la*. Ces notes sont celles des quatre cordes à vide d'un alto, l'un des instruments préférés de Bach.



Weimar. den 2. Aug. 1713

*Dieses wenige wolte dem Herrn
Besizer zu geneigtem An-
gedencken hier einzeichnen
Joh: Sebast. Bach.
Fürstlich Sächsischer HoffOrg. v.
Cammer Musicus*

Une fois traduites les mélodies dans les clés habituelles de *sol* et de *fa* et en respectant les entrées successives indiquées par le compositeur, on peut reconstituer la partition complète du canon.



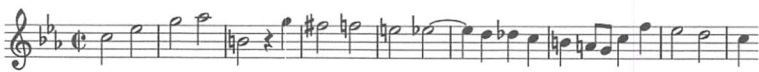
LE THÈME DU ROI

En 1740, Carl Philipp Emmanuel Bach (1714-1788), cinquième fils de Jean-Sébastien Bach, accéda à la cour du roi de Prusse, Frédéric II, dit le Grand, dans le palais duquel se donnaient quotidiennement des concerts de musique de chambre. Le roi, mélomane, flûtiste et compositeur, eut vent de l'art du vieux Bach et souhaita le rencontrer. Après avoir beaucoup insisté, Carl obtint que son père acceptât l'invitation. Pendant son séjour à Postdam, à la demande du roi, il vérifia tous les pianoforte Silbermann que le roi avait placés dans les salons et les chambres du palais. Pour preuve de sa capacité de création, sur le parcours, Bach demanda tout à coup au roi une mélodie afin d'en composer une fugue. Bach repartit à Leipzig, et en remerciement de l'attention que lui avait portée le roi, composa l'*Offrande musicale*, en se basant sur la mélodie que lui avait proposée Frédéric II. L'œuvre, dans laquelle Bach démontre son merveilleux talent, fut bouclée deux mois après leur entrevue. Elle comporte deux ricercars

(ou ricercars), dix canons et une sonate. Dans le carnet, Bach nota comme nom du premier ricercar « *Regis Iussu Cantio Et Reliqua Canonica Arte Resoluta* », ce qui signifie « thème réalisé pour le roi, et le reste selon l'art du canon ». C'est un jeu de mots, un acrostiche : si l'on écrit les mots les uns en dessous des autres, les initiales forment justement le mot RICERCAR.



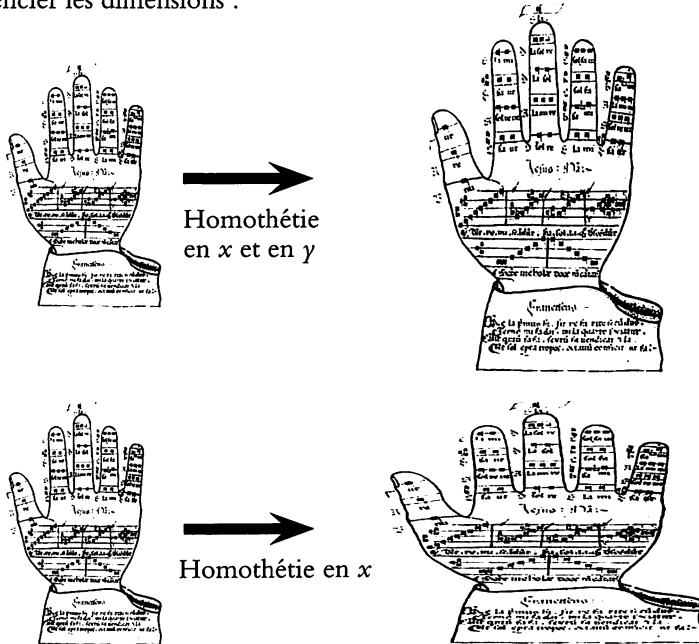
Portrait de Carl Philipp Emanuel Bach et, ci-dessous, le thème du roi Frédéric le Grand.



Transformations homothétiques

Les trois symétries différentes que nous avons vues jusque-là, la translation, la réflexion et la rotation, ont toutes la caractéristique d'être « isométriques », car elles conservent les tailles des éléments musicaux et les distances qui existent entre eux.

Il existe une autre transformation qui s'applique en musique mais qui n'est pas isométrique : l'« homothétie ». Celle-ci augmente ou diminue la taille d'une figure dans l'une de ses dimensions. Selon comment elle est appliquée, la forme de la figure sera conservée ou non. Pour l'appliquer dans le domaine de la musique, il faut différencier les dimensions :



Homothétie selon l'axe horizontal

Les exemples les plus évidents sont ceux qui n'appliquent l'homothétie que sur l'axe du temps. L'une des méthodes consiste à changer l'indication métronomique, soit la vitesse d'exécution de l'œuvre.



Changement de vitesse par modification du métronome.

Souvent, il est pourtant plus intéressant de modifier la vitesse d'exécution en gardant la même pulsation (sans changer l'indication du métronome). Dans ce cas, on changera les notes pour obtenir des durées plus longues ou plus courtes :



Le *Requiem allemand* de Johannes Brahms

Le compositeur romantique allemand Johannes Brahms (1833-1897) a utilisé ce procédé dans un passage de son *Requiem allemand*. Après quelques mesures en solo, la soprano (ligne « soprano solo » de la partition) chante une mélodie en croches, que les ténors répètent translatée d'une croche, mais en doublant la durée de chaque note : les croches deviennent des noires, les noires des blanches, etc. La soprano chante donc la mélodie deux fois plus vite que les ténors (ligne « ténors » de la partition).

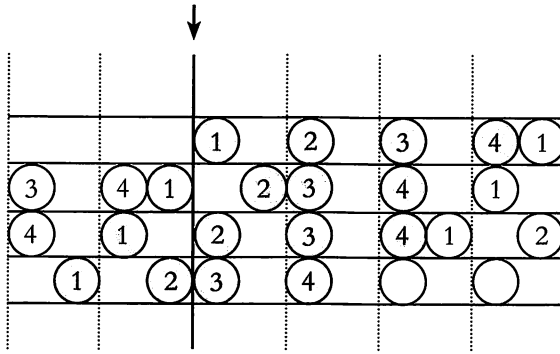


« Puttin' on the Ritz »

Cette mélodie bien connue fut composée par l'Américain Irving Berlin (1888-1989), « le plus grand compositeur de chansons légères de tous les temps », aux dires de son compatriote George Gershwin. Elle a été publiée en 1929 et fut interprétée par Benny Goodman et Fred Astaire, entre autres. C'est une chanson populaire, mais la rythmique de ses strophes est assez compliquée. Bien que la mélodie soit la répétition d'un motif de quatre notes, elle ne prend pas quatre mesures mais un peu plus de trois, ce qui donne un effet rythmique surprenant.

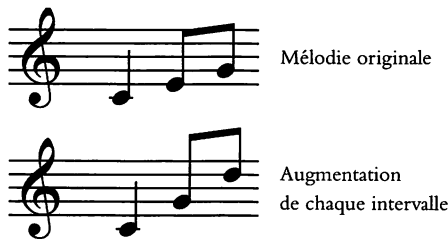


Berlin a obtenu cet effet en compressant très ingénieusement certaines des notes, l'une ou l'autre selon le cas. Sur le schéma suivant, on voit comment les quatre notes représentées par des cercles numérotés de 1 à 4 et groupées en « cellules mélodiques », avancent l'une après l'autre par rapport au début de la mesure, marqué d'une flèche.



Homothétie selon l'axe vertical

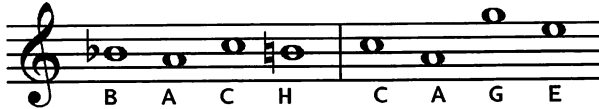
Que se passe-t-il dans ce cas ? Cette transformation est la plus étrange de toutes et la plus difficile à repérer musicalement. Une homothétie verticale augmente tous les intervalles dans la même proportion. Dans la mélodie originale, les intervalles sont deux tierces, et dans le second, elles se transforment en quintes.



On peut arriver dans certains cas à augmenter les intervalles de la mélodie originale, mais la mélodie transformée peut n'être qu'une parodie de l'original. On trouve un exemple d'homothétie verticale dans l'ouvrage de vulgarisation

scientifique de l'Américain Douglas Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach : Les Brins d'une guirlande éternelle*, qui lie les deux noms de Bach et Cage.

En utilisant la notation anglo-saxonne, de A à G, il est possible de trouver une homothétie qui transforme BACH en CAGE, ou presque.



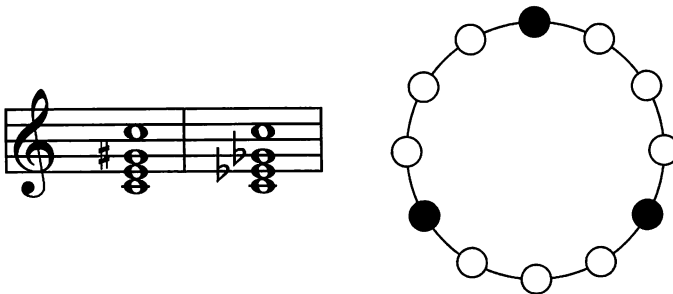
Les intervalles correspondant à BACH sont : $-1 \mid +3 \mid -1$.

En les multipliant par 3, on obtient $-3 \mid +9 \mid -3$, qui sont presque les intervalles correspondant à CAGE, qui sont $-3 \mid +10 \mid -3$.

Symétries harmoniques

Accords symétriques

Une octave est constituée de 12 demi-tons. Cet ensemble de demi-tons peut être divisé en accords symétriques de deux manières : l'un de 3 notes espacées de 4 demi-tons chacune et l'autre de 4 notes espacées de 3 demi-tons.

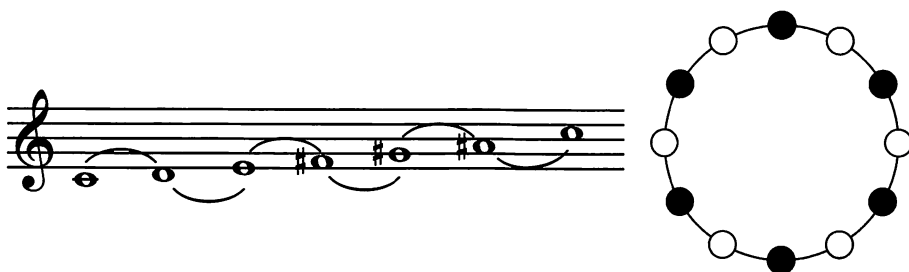


Le premier est l'accord de « quinte augmentée », qui comporte deux tierces majeures. Le second est l'accord de « septième diminuée ». En raison de sa symétrie, cet accord a joué un grand rôle dans l'histoire de la musique, car il peut être « lu » de multiples manières lorsqu'il apparaît.

Gammes symétriques

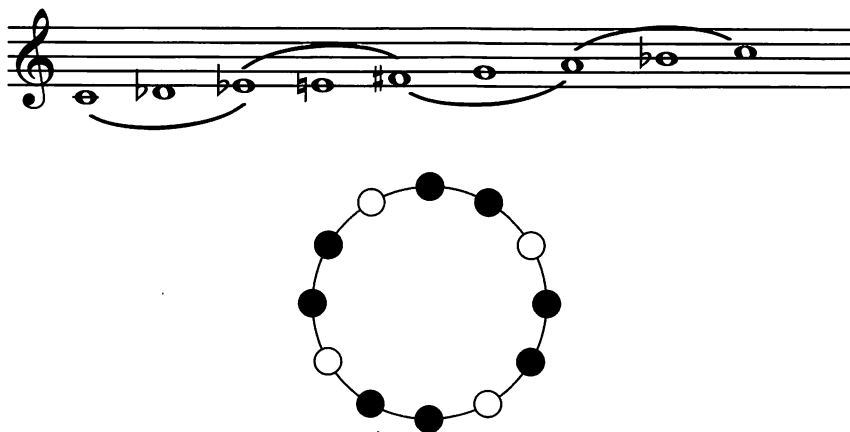
Dans son livre *Technique de mon langage musical*, le compositeur Olivier Messiaen (1908-1992) a travaillé à la classification d'un ensemble de gammes qu'il appelle « modes à transposition limitée ». Ces gammes d'une octave répartissent de manière symétrique les intervalles entre deux notes. Elles sont basées sur le système chromatique de douze demi-tons et sont formées de groupes symétriques différents. Une fois la gamme établie, on la transpose plusieurs fois de suite jusqu'à ce que ce ne soit plus possible, c'est-à-dire lorsqu'une transposition supplémentaire restitue les notes du groupe de départ.

La première gamme de la classification de Messiaen est dite « échelle des tons entiers ».

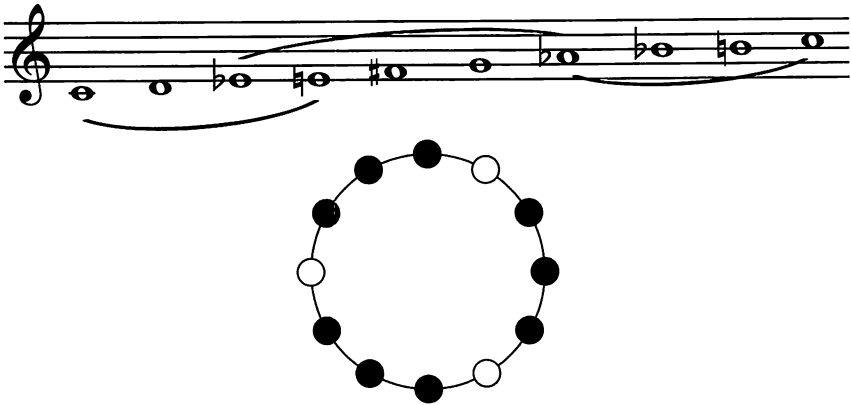


Cette échelle n'a que deux possibilités, en partant de *do* et de *do dièse*. Celle qui commence en *ré* répète les notes de l'échelle initiale.

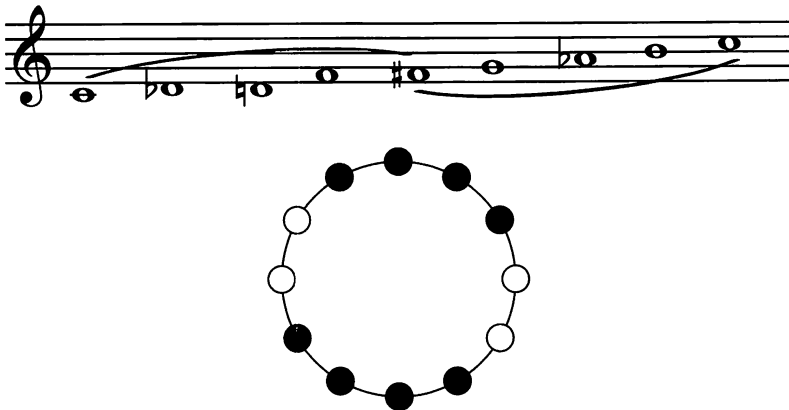
La deuxième est l'échelle octatonique diminuée, qui enchaîne alternativement des demi-tons et des tons entiers. Elle est divisée en quatre groupes de trois notes et admet trois transpositions.



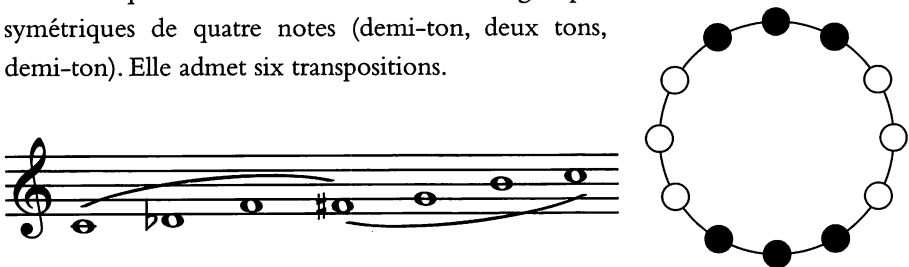
La troisième échelle est divisée en trois groupes de quatre notes, espacées par un ton, un demi-ton, un demi-ton. Elle admet quatre transpositions.



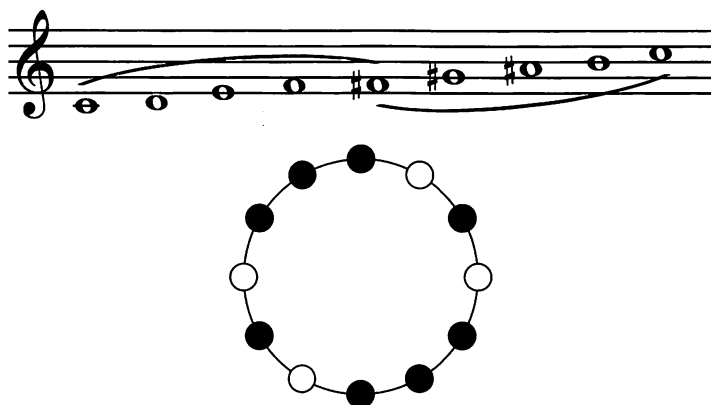
La quatrième présente la séquence demi-ton, demi-ton, ton et demi (3 demi-tons), demi-ton. Elle est divisée en deux groupes et admet six transpositions.



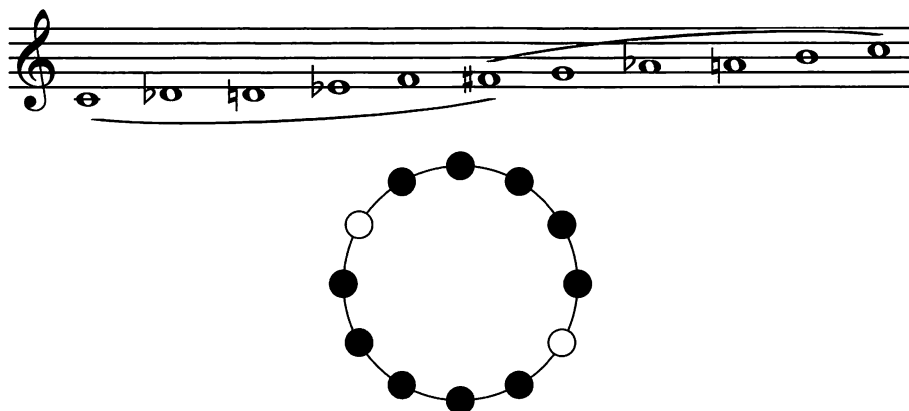
La cinquième est constituée de deux groupes symétriques de quatre notes (demi-ton, deux tons, demi-ton). Elle admet six transpositions.



La sixième est divisée en deux groupes de cinq notes (ton, ton, demi-ton, demi-ton) et admet six transpositions.



Enfin, la septième est divisée en deux groupes de six notes (demi-ton, demi-ton, demi-ton, ton, demi-ton) et admet six transpositions.



La mathématique de la forme musicale

La symétrie ne se révèle pas seulement dans les phrases et les motifs mélodiques, mais aussi dans des structures plus complexes, dans l'organisation de leurs parties d'un point de vue mathématique.

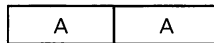
L'analyse de la forme d'une œuvre musicale étudie le « plan de l'œuvre », soit les parties qui la composent et les rapports qui existent entre elles. Un plan

peut être étudié à différentes « échelles ». On pourra en avoir une vision générale, sans en distinguer les détails ou, au contraire, se focaliser sur des détails en perdant la vision d'ensemble.

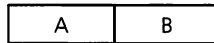
ABCDE...

Commençons par examiner l'œuvre de loin : on en observe les grandes structures, repérées par des lettres majuscules.

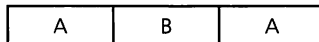
Ce qui définit les parties de la forme musicale sont les répétitions ou les variations. Ci-dessous, une œuvre d'une seule partie qui se répète intégralement :



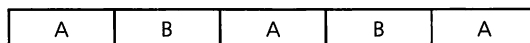
il s'agit là d'une symétrie simple. Une œuvre présentant deux parties complètement différentes ne montre, en revanche, aucune symétrie :



Existe-t-il des œuvres symétriques dans leur forme ? La réponse est « oui » et c'est, de plus, une forme très fréquente. Un exemple en est le *scherzo* (« jeu » ou « divertissement »), une forme musicale que l'on trouve habituellement comme partie d'une œuvre plus grande, comme la symphonie (par exemple, le deuxième mouvement de la *Neuvième* de Beethoven, ou le troisième mouvement de la *Quatrième* de Tchaïkovski). Le *scherzo* est de structure binaire, de la forme AB. Il arrive qu'après avoir joué la deuxième partie, la première se répète, ce qui le rend ternaire :



Cette structure est, naturellement, la forme symétrique la plus simple. On peut continuer à répéter cette partie, ce qui génère d'autres symétries :



On trouve également des formes ternaires composées, chacune des parties étant elle-même de forme ternaire. Dans ce cas de figure, la symétrie devient alors plus importante :

A	B	A
aba	cdc	aba

Certaines pièces brèves, comme la *Valse* op. 34 n° 1 de Frédéric Chopin (1810-1849), comportent des symétries encore plus marquées :

A	B	C	D	C	B	A
---	---	---	---	---	---	---

Au fur et à mesure que la taille des œuvres augmente, il devient de plus en plus difficile de voir que la deuxième partie est rétrograde. L'*Offrande musicale* de Bach présente, dans sa forme, la symétrie suivante :

RICERCARE	CANONS	SONATE EN TRIO	CANONS	RICERCARE
-----------	--------	----------------	--------	-----------

La Messe en Si mineur de Bach

Bach est certainement le compositeur le plus inventif au niveau des formes musicales et ses œuvres présentent des caractéristiques relevant de la symbolique ou des mathématiques. Sa *Messe en Si mineur* (ou *Grand Messe*) BWV 232 est formée de 27 numéros, réunis en trois groupes : le « Kyrie », le « Gloria », le « Credo » et un quatrième, lui-même composé du « Sanctus », de l'« Hosanna », du « Benedictus » et de l'« Agnus Dei ». L'idée du compositeur était de symboliser la Sainte Trinité tant dans la forme musicale que numérique.

Le numéro 3 représente la Sainte Trinité. Le total des numéros de l'œuvre, 27, est divisible par trois, comme le sont les distributions dans les différentes parties (3 + 9 + 9 + 6). Les deux numéros centraux, le « Gloria » et le « Credo », présentent une symétrie. Le « Gloria » est le centre de symétrie de la section « Domine Deus » (« Dieu, notre Seigneur ») et le « Credo », celui du « Crucifixus » (« La Crucifixion »).

—Kyrie

Kyrie eleison (1^{re}).

Christe eleison.

Kyrie eleison (2^e).

—Gloria

Gloria in excelsis.

Et in terra pax.

Laudamus te.

Gratias agimus tibi.

Domine Deus. ←

Qui tollis peccata mundi.

Qui sedes ad dexteram Patris.

Quoniam tu solus sanctus.

Cum Sancto Spiritu.

—Credo

Credo in unum Deum.

Patrem omnipotentem.

Et in unum Dominum.

Et incarnatus est.

Crucifixus. ←

Et resurrexit.

Et in Spiritum Sanctum.

Confiteor.

Et expecto.

—Sanctus, Hosanna, Benedictus, y Agnus Dei

Sanctus.

Hosanna.

Benedictus. Aria

Hosanna (da capo).

Agnus Dei.

Dona nobis pacem.

Les trois éléments centraux du « Credo » résument la vie du Christ, depuis qu'il a été engendré (*Et incarnatus est*) jusqu'à la résurrection (*Et resurrexit*), la crucifixion (*Crucifixus*) constituant le mouvement central.

CRYPTOGRAMMES MUSICAUX

Un cryptogramme est un message qui est incompréhensible pour celui qui n'en a pas la clé. Cela peut être un dessin, un texte ou un ensemble de nombres et de lettres et sa signification n'apparaîtra, dans tous les cas, qu'au moyen d'un code. Un cryptogramme musical est une pièce qui permet de décoder un texte, simplement en nommant les notes qui la composent. Plusieurs compositeurs ont construit ainsi des systèmes mélodiques avec ce procédé. Le plus célèbre sans doute est B-A-C-H, en utilisant la notation musicale allemande où B correspond au *si bémol*, A au *la*, C au *do* et H au *si*.

Il en existe d'autres :

- ABEGG : en hommage à Meta Abegg, dans les *Variations Abegg*, de Robert Schumann.
- CAGE : pour John Cage, utilisé par Paulin Oliveros.
- GADE : pour Niels Gade, utilisé par Robert Schumann.

Anton Webern, dans son *Quatuor pour cordes* op. 28 déjà mentionné, sélectionne les quatre notes BACH, et construit les huit autres notes par des transformations géométriques de cette séquence.

L'Autrichien Alban Berg (1885-1935), dans son opéra *Wozzeck*, en hommage aux trois représentants principaux de l'École de Vienne, conçoit un motif cryptographique pour chaque instrument :

- pour le piano : Arnold Schönberg (ADSCHBEG).
- pour le violon : Anton Webern (AEBE).
- pour la trompette : Alban Berg (ABABEG).

Le nombre d'or en musique

L'Italien Léonard de Pise, plus connu sous le nom de Fibonacci (vers 1170-1250), fut l'un de ceux qui introduisirent la notation arabe en Occident. Il présente le problème suivant dans son œuvre, le *Liber Abaci* :

« À partir de son deuxième mois, un couple de lapins (un mâle et une femelle) conçoit un nouveau couple de lapins tous les mois. La période de gestation est d'un mois. Au bout d'un an, combien y aura-t-il de couples de lapins ? »

La solution de ce problème est la suivante :

- les deux premiers mois, il n'y aura qu'un couple, A.
- le troisième mois, naît le premier couple B, descendant de A.
- le quatrième mois naît C, le deuxième couple descendant de A.
- le cinquième mois naît D, le troisième couple descendant de A, et E, le premier couple descendant de B.

Ainsi, la quantité de couples de lapins suit la séquence : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144... Cette série est connue sous le nom de « suite de Fibonacci ». Si nous divisons chaque terme de cette suite par le nombre qui le précède, nous obtiendrons les valeurs suivantes :

$$1/1 = 1$$

$$2/1 = 2$$

$$3/2 = 1,5$$

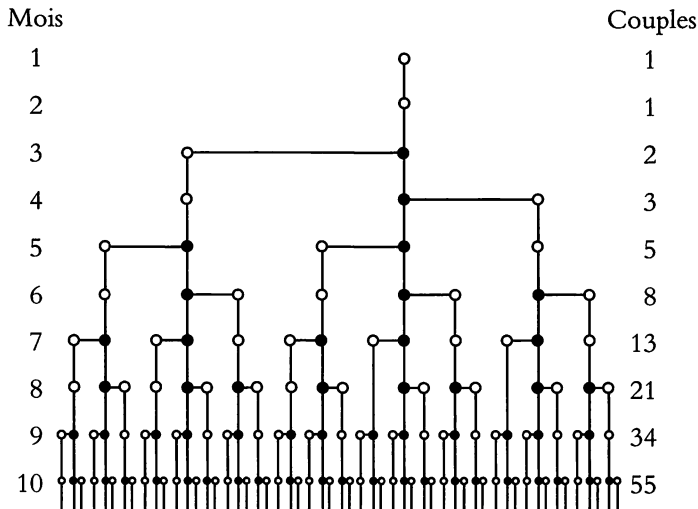
$$5/3 = 1,666...$$

$$8/5 = 1,6$$

$$13/8 = 1,625$$

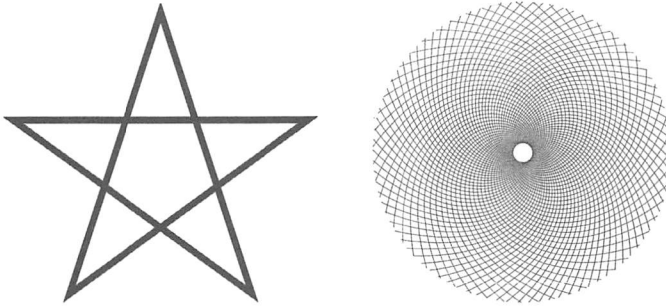
$$21/13 = 1,615...$$

$$34/21 = 1,619...$$



*Schéma de l'évolution des couples de lapins.
Les points blancs désignent les couples jeunes
et les noirs, les couples adultes en âge de procréer.*

La limite de cette suite n'est autre que 1,618033989..., appelé « nombre d'or », « proportion divine » ou « section dorée ». Il est associé depuis bien longtemps à l'harmonie et la beauté. Les termes de la suite de Fibonacci apparaissent dans plusieurs domaines différents de la nature : le nombre de rangées de graines du tournesol, l'angle entre la feuille et la tige de certaines plantes, la spirale des coquilles de gastéropodes...



Tous les segments du pentagramme de l'étoile à cinq branches, très présente symboliquement dans plusieurs cultures, sont liés par le nombre d'or. À droite, schéma de la disposition des graines de tournesol, avec ses 55 spirales tournant vers la droite et 89 en sens contraire.

Le nombre d'or apparaît aussi en musique. Certaines compositions de Mozart et de Beethoven semblent atteindre leur climax, le moment de tension maximum, en un point qui divise l'œuvre en sections de longueur respectant approximativement la proportion d'or. Il est fort probable que ces deux génies arrivèrent à ce résultat de manière intuitive, dans la recherche de l'équilibre de la forme de leurs œuvres. En revanche, dans le cas de Bartok, l'apparition dans son œuvre de nombres de Fibonacci est si flagrante qu'il semble peu probable qu'il ne les ait pas utilisés sciemment. Ainsi, dans son œuvre *Musique pour cordes, percussion et célesta*, on compte (presque) 89 mesures divisées en sections de 55 et 34 mesures. Ces sections sont, à leur tour, divisées selon les nombres de Fibonacci : la première en 34 et 21 mesures, et la deuxième en 13 et 21. Le troisième mouvement de l'œuvre, un adagio, commence avec une progression rythmique où le xylophone joue le même *fa* par groupes de 1, 1, 2, 3, 5, 8, 5, 3, 2, 1 et 1. Son *Quatuor pour cordes n° 4* présente, sur ses cinq mouvements, 2 584 temps, le 18^e nombre de la suite de Fibonacci.

On les retrouve apparemment aussi dans des motifs qu'utilisait Bartok, qui comportent des intervalles composés de 2, 3, 5, 8 et 13 demi-tons.

De la même manière, l'organisation de certaines œuvres de Debussy semblent être liée au nombre d'or ou suivre la séquence de Fibonacci. L'introduction du « Dialogue du vent et la mer » de l'œuvre pour orchestre *La Mer* présente 55 mesures qui se divisent en sections de 21, 8, 8, 5 et 13 mesures de longueur. La mesure d'« or » numéro 34 est pour sa part marquée d'un coup de trombones.

Malgré l'apparente véracité de ces analyses, il faut garder une certaine réserve. Elles peuvent relever de prophéties autosuggérées : un auditeur, averti d'avance de la présence (éventuelle) de proportions en relation au nombre d'or, peut être en quelque sorte conditionné à les entendre réellement.

LA MESURE DE LA BEAUTÉ

Lorsqu'il crée, l'artiste élabore la forme de son œuvre, dans le détail ou l'aspect général, en cherchant les moments de tension et de détente, les arêtes et les courbes, les aigus et les graves. Il en résulte un état d'équilibre, stable ou instable. Le plaisir esthétique que l'œuvre produit sur l'observateur est, au final, une question subjective. Mais existe-t-il un critère objectif, au moins approximatif, de la beauté d'une œuvre ? Le nombre d'or est peut-être l'un de ces outils de mesure objectifs de la beauté d'une chose, mais il en existe peut-être d'autres. C'est en tous cas l'avis du mathématicien George Birkhoff (1884-1944). Sur la base de recherches menées lors de manifestations artistiques, il a publié au début des années 1930, *A Mathematical Theory of Aesthetics (Une théorie mathématique de l'esthétique)* et *Aesthetic Measure (Mesure de l'esthétique)*. Les études de Birkhoff avaient pour objet les arts plastiques, la musique et la poésie. Il définit un facteur, nommé « mesure esthétique », à partir de deux autres facteurs, l'« ordre esthétique » (O) et la « complexité » (C) :

$$M = \frac{O}{C}.$$

L'ordre esthétique dépend de la régularité des éléments qui composent l'objet d'études, alors que la complexité mesure la présence plus ou moins importante de ces éléments. Birkhoff fut le premier à reconnaître que, pour obtenir des résultats significatifs, il lui était difficile d'étudier l'œuvre dans son ensemble, mais qu'il se centrerait plutôt sur certaines caractéristiques : dans le cas de la musique, par exemple, il étudiait les accords indépendamment du rythme et du contexte harmonique. Birkhoff consacra trois chapitres de son livre à la musique, dans lesquels il analyse les accords, l'harmonie, la mélodie et le contrepoint. Indépendamment de la question de l'efficacité de son système, il est intéressant de voir que l'équation postule que la beauté croît lorsque décroît la complexité, ou, en d'autres termes, qu'il existe une relation directe entre beauté et simplicité.

Chapitre 4

Ondes et bits

*La musique est l'arithmétique des sons,
comme l'optique est la géométrie de la lumière.*

Claude Debussy

Nous nous proposons maintenant d'affiner notre ouïe pour distinguer les diverses propriétés du son et la manière dont se tissent les rapports entre ces dernières, en pénétrant pour cela dans les profondeurs de la nature. Dans cette approche du son, cette fois comme phénomène physique et non comme manifestation artistique, nous devons utiliser des outils mathématiques pour le déchiffrer et le comprendre.

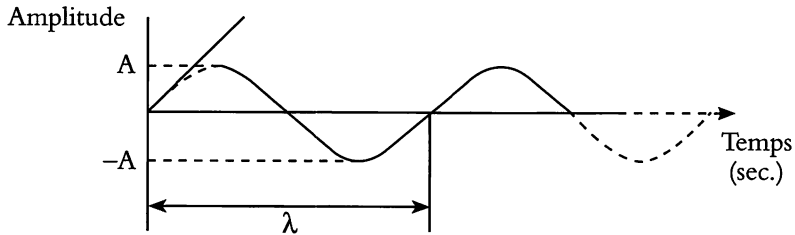
Nous plongerons également dans le microcosme et les flux d'électrons des circuits électroniques pour observer comment se déplace l'information sonore lorsqu'il ne s'agit pas d'une onde acoustique.

La physique du son

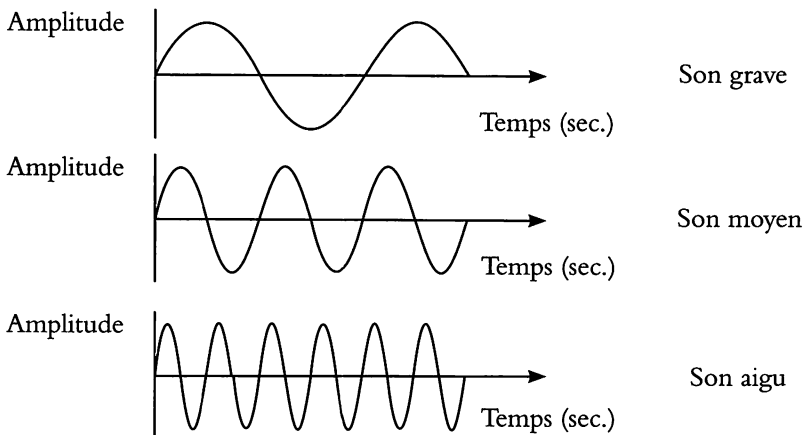
Nous avons déjà vu cette caractéristique du son, appelée hauteur ou ton, qui est associée aux fréquences de la vibration sonore. Un son est généré par le mouvement oscillatoire de tout corps solide, qu'il s'agisse de métal, de bois, de cuir, ou des cordes vocales, ou encore d'un fluide comme l'air ou l'eau. Une fois émise, la vibration se propage vers les particules voisines.

Quelle que soit la source du son, l'onde finira par se propager dans l'air et elle pourra alors atteindre nos oreilles. L'effet de la propagation de l'onde se manifeste par la compression et l'expansion des molécules locales de l'air, et c'est ce que nos oreilles perçoivent comme un son. Il s'agit d'une oscillation des états de pression. Lorsque le va-et-vient de la vibration se répète régulièrement, on dit qu'il est périodique. S'il a en plus une forme particulière dite « sinusoïdale », l'oscillation est ce que l'on appelle « harmonique ». Le temps écoulé entre deux états identiques est l'inverse de la « fréquence » de l'oscillation, qui se mesure en Hertz. Plus la fréquence est haute, plus le son est aigu.

Une oscillation sonore part d'un état de repos et augmente graduellement jusqu'à atteindre son maximum d'élongation (A), puis elle revient vers l'état de repos pour continuer vers son maximum d'élongation dans la direction opposée ($-A$). En revenant ensuite vers son état de repos, elle aura accompli un cycle complet pendant une durée λ (λ). En ce point, la pente de la courbe est la même qu'au point de départ. Une oscillation sonore dite « pure » peut être représentée mathématiquement par la fonction sinus :



Les variables de cette fonction correspondent à chacune des caractéristiques du son, à savoir la hauteur, l'intensité et le timbre. La « hauteur » est donnée par la fréquence d'oscillation : aux fréquences basses correspondent les tons graves, et aux fréquences élevées, les tons aigus.

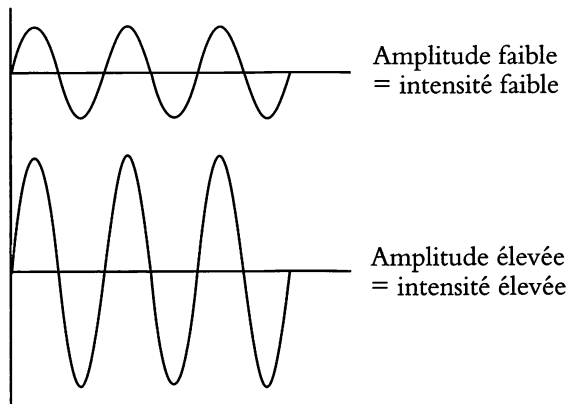


La hauteur du son est proportionnelle à sa fréquence.

Le spectre des fréquences détectables par l'oreille humaine varie en fonction des personnes et de l'âge, mais il couvre normalement onze octaves :

1 ^{re} octave :	16-32 Hz
2 ^e octave :	32-64 Hz
3 ^e octave :	64-125 Hz
4 ^e octave :	125-250 Hz
5 ^e octave :	250-500 Hz
6 ^e octave :	500-1 000 Hz
7 ^e octave :	1 000-2 000 Hz
8 ^e octave :	2 000-4 000 Hz
9 ^e octave :	4 000-8 000 Hz
10 ^e octave :	8 000-16 000 Hz
11 ^e octave :	16 000-32 000 Hz.

L'« intensité », ou puissance transportée par l'onde sonore (puissance acoustique), dépend de l'amplitude de l'onde : plus l'onde est de grande amplitude, plus le volume est fort. Il faut noter que le seuil d'audibilité correspond à une pression d'intensité acoustique de 2×10^{-4} bar, alors que la tolérance maximale, ou seuil de la douleur, se situe aux alentours de 200 bar.



L'intensité du son est proportionnelle à l'amplitude.

La puissance acoustique se mesure en bel (B), ou plutôt dans la pratique en décibel (dB), un décibel étant égal à un dixième de bel. Pour le définir, on a pris en compte le fait que la sensibilité de l'oreille humaine à l'intensité acoustique suit une échelle pratiquement logarithmique, c'est-à-dire que pour des intensités de plus en plus hautes, l'oreille humaine éprouve une sensation de rejet de plus en plus forte. L'échelle de l'intensité part de 0 dB, le seuil d'audibilité, et atteint

120 à 140 dB, le seuil de la douleur. Le tableau suivant donne quelques exemples d'activités bruyantes et les intensités sonores correspondantes :

Intensité du son	
120-140 dB	Seuil de la douleur
120 dB	Moteur d'avion en marche
100 dB	Un orchestre en train de jouer
90 dB	Une avenue bruyante, très passante
80 dB	Train
70 dB	Orchestre de cuivres
50 dB	Orchestre à cordes
40 dB	Conversation
20 dB	Salle de lecture
10 dB	Respiration tranquille
0 dB	Seuil d'audibilité

LES ONDES EN 3D

Il est intéressant de distinguer les différents types d'ondes pour mieux comprendre les phénomènes sonores. Il existe des ondes unidimensionnelles, qui se déplacent sur une droite. D'autres se propagent sur une surface et sont bidimensionnelles, comme l'onde créée par une pierre qui tombe dans l'eau. Les fronts d'onde sont des cercles concentriques, dont le centre est l'endroit où l'onde est produite (là où la pierre tombe). Les ondes sonores appartiennent au groupe des ondes tridimensionnelles, leur front d'onde est constitué de surfaces sphériques. Si la courbe qui représente les ondes sonores est une sinusoïde, le phénomène, lui, a lieu dans l'espace tridimensionnel. L'intensité sonore est une puissance par unité de surface. Comme la surface est sphérique, l'intensité sonore se calcule comme suit :

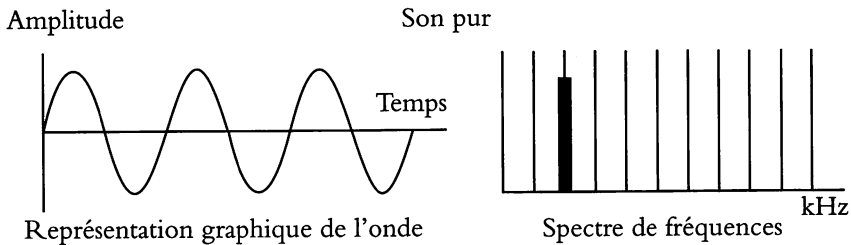
$$I = \frac{P}{S}$$

où I est l'intensité, P la puissance et S la surface. Étant donné que $S = 4\pi r^2$, l'intensité est inversement proportionnelle au carré de la distance.

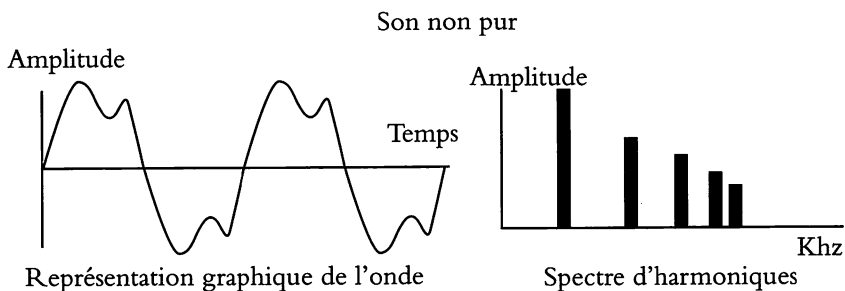
Enfin, le « timbre » est ce qui donne sa « personnalité » au son : c'est la caractéristique qui va permettre, par exemple, d'identifier la voix d'une personne donnée. Le timbre permet également de distinguer des instruments différents, même si les sons qu'ils produisent sont de même hauteur et intensité. Mais qu'est-ce que le timbre, physiquement ? Pour répondre à cette question, il nous faut mieux connaître la nature des sons.

Ton pur et ton réel

La sinusoïde représente l'oscillation d'une onde sonore pure, ce qui est peu habituel dans la réalité. Le son produit par un diapason ou celui obtenu en frottant le doigt humide sur les bords d'un verre en cristal, sont des exemples de sons purs.



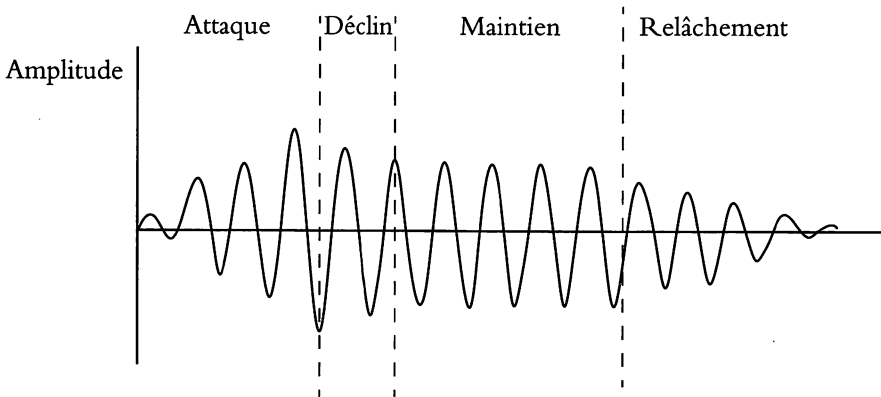
Mais en pinçant la corde d'une guitare, en tapant sur une cloche ou en soufflant dans le conduit d'une flûte, on produit un son complexe, composé d'une vibration principale et d'un ensemble d'ondes de moindres intensités et de fréquences supérieures. Ces ondes associées s'appellent des « harmoniques ». Tout son pur est en fait un ensemble de sons simultanés. La contribution du mathématicien français Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) à l'analyse individuelle des harmoniques d'un son quelconque fut importante, car il démontra que toute onde périodique non sinusoïdale pouvait se décomposer en une série d'ondes sinusoïdales.



Dans le cas d'un son, il peut être décomposé en une onde pour chaque harmonique et une pour le son fondamental, ou ton pur principal. Ce chaos apparent est en fait extrêmement ordonné. De par la nature du matériau qui génère le son et le milieu ambiant avec ses résonateurs, etc., le ton fondamental produit des harmoniques dont les fréquences lui sont proportionnelles. Pour les étudier et les évaluer, on classe et on numérote les harmoniques selon les fréquences croissantes. De manière générale, on peut dire que plus la fréquence est élevée, plus l'intensité est faible. Mais une multitude de facteurs viennent modifier l'intensité des harmoniques, dont, entre autres, la géométrie du corps sonore, le matériau dont il est fait, la géométrie de la cavité de résonance. Toutes ces conditions vont intensifier certaines harmoniques ou en atténuer d'autres. La diversité de toutes ces combinaisons de facteurs fait la variété du timbre, qui va donner leur personnalité aux sons produits.

Le son réel émis par un instrument de musique présente quatre caractéristiques qui sont liées à l'évolution temporelle de l'émission :

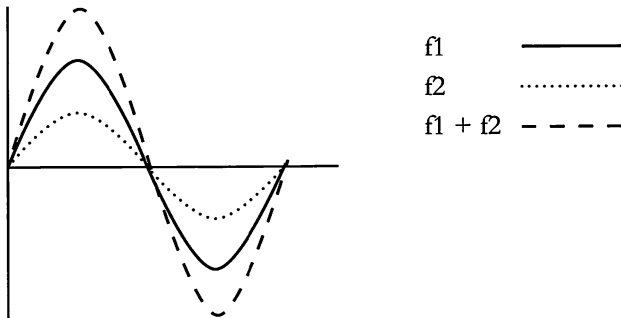
- L'« attaque » ; c'est le temps entre le moment où la note est jouée et celui où le son atteint son intensité maximale.
- Le « déclin » ; c'est le temps qui s'écoule entre le moment d'amplitude maximale et le moment où l'émission se stabilise.
- Le « maintien » ; c'est le temps pendant lequel le son garde son amplitude pendant l'émission.
- Le « relâchement » ; c'est le temps qui s'écoule avant que l'amplitude ne décroisse jusqu'à s'annuler, lorsqu'on arrête l'émission sonore.



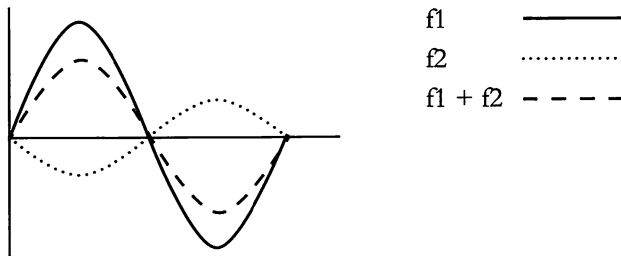
Différents moments d'une émission sonore de fréquence constante.

Superpositions d'ondes

La représentation d'un son réel montre qu'il est la superposition d'ondes séparées : la fondamentale et ses harmoniques. Prenons un cas simple de superposition d'ondes en considérant deux sons de même fréquence mais d'amplitude différente. Si les phases coïncident, le son est amplifié :



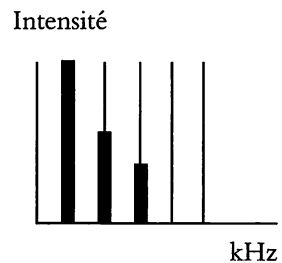
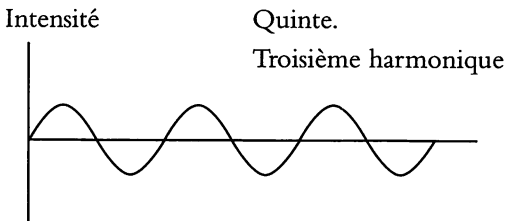
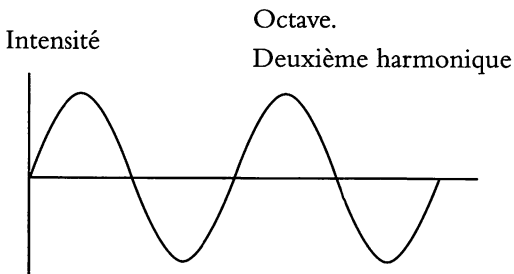
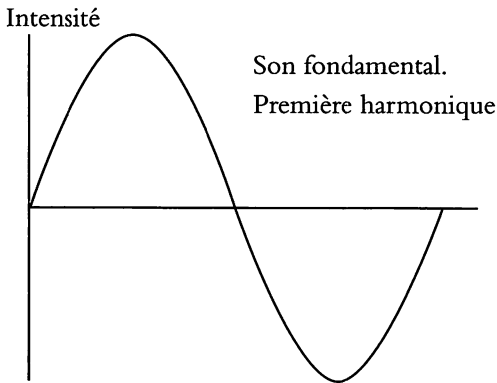
En revanche, si les courbes sont déphasées, le son est atténué :



Comment cela se manifeste-t-il pratiquement ? Sans chercher plus loin, on le constate dans les salles de concert : le volume que peut atteindre un chœur important ou un orchestre à cordes est notablement supérieur à celui d'un groupe vocal de quatre ou huit chanteurs, ou respectivement à celui d'un quatuor à cordes.

Dans des cas plus complexes, comme celui d'un son réel produit par un instrument de musique, on obtiendra une courbe non sinusoïdale en raison de la présence simultanée de plusieurs ondes partielles, ou ondes harmoniques.

Comme il s'agit d'ondes périodiques, on peut appliquer le principe de Fourier pour déterminer la fréquence de chacune d'elles.



La fonction des harmoniques

Les harmoniques dont la fréquence est une puissance de 2 (2, 4, 8...) correspondent aux octaves du son fondamental et leur présence vient renforcer l'intensité du son. Les harmoniques puissances de 3 (3, 6, 12...) correspondent à une succession d'octaves de quintes ; elles donnent au son un timbre nasal. Les harmoniques 5, 10, 20... correspondent à la tierce de la fondamentale et à ses octaves ; elles contribuent à la qualité du son. Enfin, les harmoniques qui correspondent à des intervalles dissonants donnent au son un côté dur.

Synthèse acoustique

Les premières tentatives de construction d'orgues électriques datent de plus d'une centaine d'années. Les pionniers dans ce domaine furent l'Américain Thaddeus Cahill, inventeur en 1900 du telharmonium, le Russe Léon Theremin, inventeur en 1924 de l'instrument qui porte son nom, et le Français Maurice Martenot, qui, en 1928, créa les Ondes Martenot. S'ils ouvrirent ainsi la voie à cette technologie, le développement d'instruments synthétiseurs de sons prit son essor à la fin de la Seconde Guerre mondiale. Pendant le siècle dernier, les progrès technologiques dans le domaine du son ont permis, d'une part, de mieux connaître sa nature et ses spécificités, et d'autre part, d'avancer dans la synthèse acoustique de plus en plus efficacement.

Le premier problème à résoudre dans la synthèse acoustique est justement la « génération » du son. Les modes de génération les plus courants sont au nombre de deux : le premier consiste à utiliser des générateurs pour chacun des douze sons de l'octave la plus aiguë ; le deuxième consiste à générer le son le plus aigu de cette octave et les onze demi-tons restants de manière électronique. Une fois obtenue l'octave supérieure, les fréquences des autres octaves s'obtiennent au moyen de diviseurs de fréquence, qui produisent l'octave relative à chaque son selon la relation 2:1.

Le son de base une fois créé, les différents paramètres sont modifiés pour obtenir le son recherché. C'est un point crucial pour les concepteurs de son car, à la recherche de sons synthétiques les plus réels possible, s'ajoute, en parallèle, le désir d'en trouver de totalement nouveaux.

Les progrès de la synthèse sonore durant ces dernières années recouvrent un ensemble d'aspects qui dépassent le cadre de cet ouvrage. Nous en mentionnerons néanmoins quelques-uns en raison de leur intérêt mathématique, tels les filtres et les stimulateurs (*enhancers*), qui agissent sur les harmoniques pour modifier le timbre du son généré par l'oscillateur. Si le son est pauvre en harmoniques, on l'enrichit au moyen de stimulateurs qui produisent des harmoniques paires, pendant que les filtres limitent ou éliminent certaines fréquences. En général, on les combine pour trouver le timbre exact correspondant au son d'une trompette, d'un violon ou de tout autre instrument. Les filtres les plus utilisés sont :

- le filtre passe-bas, qui coupe les fréquences hautes ;
- le filtre passe-haut, qui fait de même avec les fréquences basses ;
- le filtre passe-bande, qui coupe les fréquences hautes et basses, ne laissant passer que les fréquences centrales ;
- le filtre coupe-bande, qui supprime les fréquences centrales.

Audio numérique

Tous les sons que nous entendons dans la vie quotidienne nous parviennent sous forme d'ondes physiques qui sont transmises soit par l'air, soit par l'eau ou tout autre milieu qui le permette. Depuis l'invention du phonographe par T.A. Edison en 1877, divers moyens analogiques ont été développés pour stocker et reproduire le son.

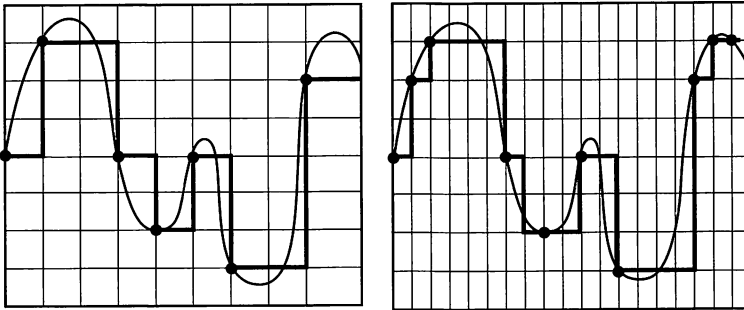
Les dispositifs audio numériques nécessitent que le son soit « traduit » en une série d'impulsions électriques au moyen d'un transducteur, comme le microphone par exemple. Ces impulsions, éventuellement enregistrées et copiées, peuvent être reconverties en ondes physiques par un autre transducteur, comme le haut-parleur.

MARY HAD A LITTLE LAMB OU AU CLAIR DE LA LUNE ?

Jusqu'en 2008, l'enregistrement de voix humaine le plus ancien était celui de la voix de Thomas Alva Edison lui-même, qui, le 21 novembre 1877, récita le poème *Mary had a little lamb* (« Marie avait un agneau ») pour essayer le phonographe qu'il venait d'inventer. Quelques jours plus tard, il fit la première présentation publique de son invention et, une année plus tard, le breveta et en fit la démonstration à l'Académie française des sciences. L'invention était si surprenante que les scientifiques crurent qu'il s'agissait d'une supercherie et qu'il y avait un ventriloque dans la salle. Les vibrations produites par le son étaient littéralement gravées sur une couche d'étain (que l'on remplaça ensuite par de la cire), couvrant la surface d'un cylindre qui tournait sur son axe. L'enregistrement acoustique, qui avait la forme d'un sillon hélicoïdal, était à nouveau transformé en son. Au début, le phonographe fut employé comme dictaphone par les entreprises et les administrations gouvernementales. En fait, Edison n'avait jamais pensé que son invention pourrait surtout servir à enregistrer et reproduire des interprétations musicales. Au début, il s'y opposa au point même de l'interdire. Quoi qu'il en soit, le cylindre musical finit par conquérir le monde entier et ouvrit la voie aux disques plats, vers 1890. Il s'avère que, vingt ans avant le premier enregistrement d'Edison, le Français Édouard-Léon Scott avait inventé le phonautographe, qui permettait d'enregistrer les vibrations mais pas de les reproduire. Les enregistrements réalisés avec le phonautographe sont conservés à la bibliothèque du Congrès aux États-Unis. En 2008, une équipe de chercheurs réussit à traiter l'un d'entre eux, daté de 1860, et l'on reconnaît, noyées dans un bruit de fond, les notes de la comptine française *Au clair de la lune*. Cet enregistrement est donc le plus ancien de l'histoire.

Numérisation du son

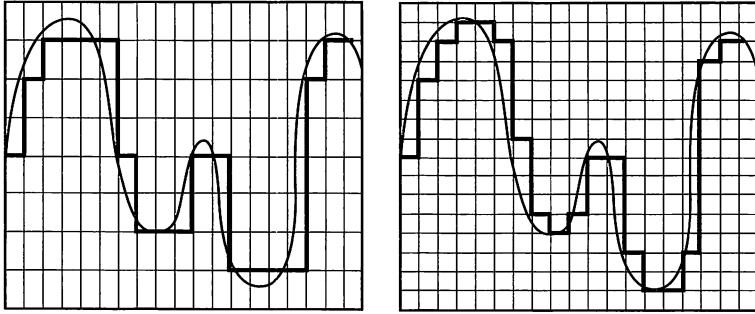
La numérisation du son s'effectue par le procédé de modulation par impulsions codées (abrégié en MIC et, en anglais, PCM, pour *Pulse-Code Modulation*) grâce à un convertisseur analogique numérique (CAN ou ADC, en anglais, pour *Analog-to-Digital Converter*). Le signal analogique peut être représenté par une courbe que l'on va décrire numériquement. Le procédé de numérisation d'un signal analogique audio consiste à « discrétiser » la courbe : on prend une grande quantité d'échantillons du son (procédé connu sous le nom d'« échantillonnage » ou *sampling* en anglais), à intervalles réguliers. Plus la quantité d'échantillons est grande, plus l'enregistrement et la reproduction seront fidèles et la qualité du son enregistré sera donc meilleure. C'est la même chose pour les films : plus la quantité d'images par seconde est grande, plus le mouvement sera restitué en détail. De même d'un point de vue graphique : plus on connaît de points d'une courbe, meilleure en est son approximation.



Plus le nombre d'échantillons du son est grand, c'est-à-dire plus il y a de lignes verticales, plus l'approximation de la courbe par les segments du quadrillage sera fidèle.

Le théorème d'échantillonnage de Nyquist-Shannon stipule que, sous certaines conditions, un signal analogique de fréquence maximale M peut être reconstruit si le taux d'échantillonnage (nombre d'échantillons par seconde) est supérieur à $2M$. Étant donné que la fréquence maximale perceptible par l'oreille humaine est de 20 000 Hz, le taux d'échantillonnage des CD audio est de 44 100 échantillons par seconde, valeur légèrement supérieure au double de la fréquence maximale.

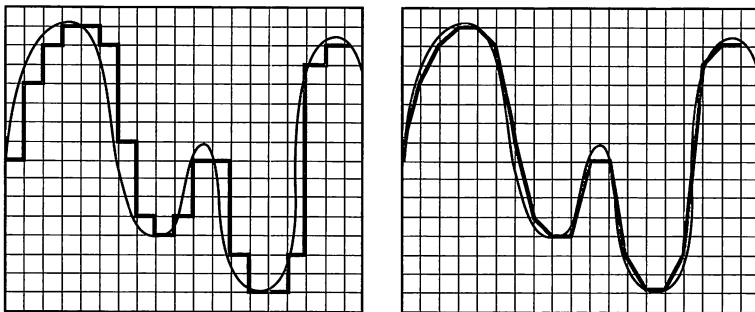
Un autre facteur joue sur la fidélité de la conversion : la précision avec laquelle sont prélevés les échantillons, qu'on appelle *bit resolution*. Graphiquement, chaque échantillon a une hauteur qui doit être mesurée. Cette mesure peut s'effectuer avec différents niveaux de précision : plus on utilisera de bits pour la mesure, plus on pourra diviser la distance à mesurer et meilleure sera donc la précision de mesure de chaque échantillon.



À nouveau, plus l'échantillon contient de détails (donc de lignes horizontales), plus le quadrillage permettra une approche fidèle de la courbe originale.

Retour à l'analogique

Le rôle d'un convertisseur numérique-analogique (CNA et, en anglais, DAC, pour *Digital-to-Analog Converter*) est de convertir le signal audio numérique en un signal analogique. C'est l'inverse du procédé de numérisation : connaissant un certain nombre de points d'une courbe, on cherche à la reconstruire en procédant à une « interpolation », procédé mathématique qui permet de déduire quelles peuvent être les valeurs intermédiaires entre celles déjà connues. Un premier modèle d'interpolation est celui appelé en anglais *Zero-order hold*, qui consiste à maintenir simplement la valeur de l'échantillon sur tout l'intervalle. Une autre méthode, dite du *First-order hold*, effectue une approximation linéaire entre deux valeurs connues.



À gauche, une interpolation de type *Zero-order hold*. La valeur sur l'intervalle séparant deux valeurs connues est supposée être la même que celle de gauche : la ligne reste horizontale. À droite, une interpolation de type *First-order hold*.

La valeur sur l'intervalle entre deux valeurs connues se trouve sur la droite qui réunit les deux extrémités de cet intervalle.

BEETHOVEN, BAYREUTH, LE NAZISME ET LA NAISSANCE DU CD

Dans les années 1980, la technologie du disque compact était déjà suffisamment avancée pour qu'elle soit commercialement viable. L'entreprise néerlandaise Philips et l'entreprise nipponne Sony étaient alors les leaders sur le marché de l'audio et de l'électronique. Sony présenta un prototype de disque compact de 120 mm de diamètre et d'une capacité de 74 minutes. De son côté, Philips développa un prototype de 115 mm, avec une capacité de 60 minutes d'enregistrement. C'est le prototype de Sony qui a fini par s'imposer, devenant la norme qui allait dominer la technologie pendant plus de trente ans. Mais pourquoi le CD de Sony s'est-il imposé et pourquoi cette capacité de 74 minutes apparemment arbitraire ? Aux dires de Norio Ohga, l'un des grands directeurs de Sony à cette époque, l'argument en faveur de son prototype était qu'il permettait de disposer des grandes œuvres musicales universelles, comme la *Neuvième symphonie* de Beethoven, sur un seul disque. Les mélomanes s'accordent à dire que l'enregistrement de référence de cette œuvre monumentale est celui réalisé en 1951, avec le chef d'orchestre allemand Wilhelm Furtwängler, à l'occasion de la réouverture du Festival de Bayreuth, après la Seconde Guerre mondiale. Ce festival avait lieu dans la ville du même nom depuis 1876 et donnait des représentations annuelles des œuvres de Wagner. En raison de la sympathie des héritiers de Wagner pour la cause nazie, il était devenu, dans les années précédant le conflit, le symbole du pangermanisme agressif et belliqueux. La réouverture du festival, très attendue dans tout le pays, symbolisait un tournant pour une nation dévastée et accablée de culpabilité. L'Allemagne, grâce à la *Neuvième Symphonie*, une œuvre ouverte et universelle, couronnée par l'éternel *Hymne à la joie*, cherchait à retrouver sa place dans le concert des nations civilisées et à tourner la page après cette tragédie récente. Furtwängler et ses solistes furent à la hauteur de ce moment historique et ils interprétèrent l'œuvre avec une telle intensité et une telle émotion, qu'à la fin, le public, stupéfait, resta silencieux plusieurs secondes avant que n'éclatent des tonnerres d'applaudissements et d'acclamations qui durèrent presque une heure. Les techniciens du son chargés de l'événement omirent cette dernière partie et la *Neuvième* de Furtwängler à Bayreuth est immortalisée par un enregistrement de... 74 minutes.

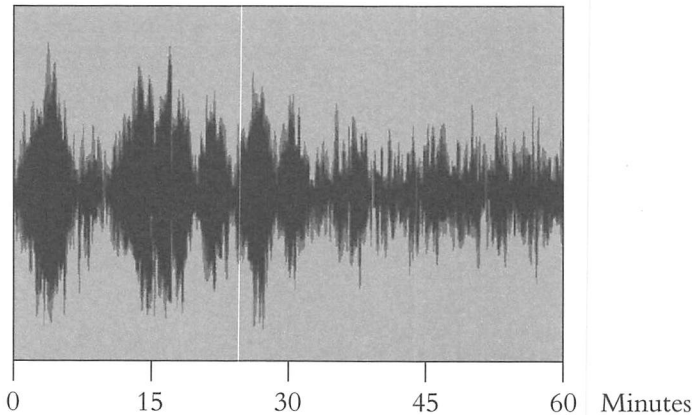


Timbre commémoratif de la mort de Wilhelm Furtwängler, survenue en 1954.

Compression

Signal audio à l'état brut

Une onde sonore se représente graphiquement en fonction du temps. Pour représenter cette onde sur une feuille de papier, il faudrait que cette feuille soit d'une longueur proportionnelle à la durée du son à représenter.



En d'autres termes, le son présente un taux d'information constant. Les dispositifs audio analogiques fonctionnent avec un taux d'information constant. Il suffit de constater que la vitesse d'un tourne-disque ou d'une bande magnétique est invariable pendant l'enregistrement et la reproduction. La numérisation d'un signal audio se fait aussi à taux d'information constant. Le fichier obtenu est appelé fichier audio brut. Pour la qualité requise pour un CD, ce fichier contient beaucoup d'informations. Il nécessite des capacités de stockage importantes et une grande largeur de bande pour sa transmission. C'est pourquoi on utilise le procédé de compression sur ce type de fichiers.

Compression audio

La compression est un procédé qui permet de coder l'information numérique en utilisant moins de bits. L'audio numérique est comprimé sous des formats MP3, FLAC ou Vorbis pour les stocker sous forme de fichiers moins volumineux

ou encore pour les transmettre plus rapidement. Il faut dans les deux cas décompresser les fichiers audio avant de les reproduire. Il existe divers algorithmes de codage pour réaliser la compression. Ils sont de deux types : avec ou sans perte d'information. Une compression avec perte dégrade la qualité du son de manière irrémédiable alors qu'une compression sans perte permet de reconstituer le son comme il était à l'origine, sans perte de qualité. Les plus utilisées sont les compressions ZIP, RAR, ARJ, entre autres, qui utilisent des algorithmes ne dégradant pas la qualité des fichiers. Sinon, un texte compressé pourrait perdre des lettres, voire des mots entiers, pendant le processus de compression-décompression.

La vitesse de traitement de chaque algorithme est également importante : un algorithme plus compliqué peut permettre une meilleure compression, mais, s'il demande beaucoup de temps, il ne sera pas très utile dans la phase de *streaming* en temps réel.

Quel format utiliser ? Quand faut-il compresser ? C'est un choix à faire en fonction de la qualité souhaitée, de l'espace de stockage disponible et du temps de transmission requis. La qualité est importante pour un usage professionnel. Pour des usages plus courants, le *streaming* ou les communications téléphoniques, la préférence est donnée aux fichiers compressés.

Méthodes de compression

L'une des méthodes principales de compression est basée sur l'identification de modèles et de répétitions. Comment compresser chacune des séquences binaires suivantes ?

- a) 11111111111111111111111111111111...
- b) 10110111011110111110111111011111...
- c) 11010110001011010000101001110010...

Pour mieux comprendre la notion de compression d'information, cherchons quelles instructions nous pourrions donner à quelqu'un qui jouerait le rôle de récepteur, pour qu'il puisse reproduire cette information.

La séquence (a) est simple à transmettre : il suffit de donner l'instruction « écrire toujours un 1 ».

La séquence (b) est un peu plus compliquée : l'instruction serait « écrire chaque fois un 1 de plus, en séparant les groupes par un 0 ».

La séquence (c) est la plus compliquée : elle est trop irrégulière pour donner des instructions qui évitent de transmettre les chiffres un par un.

La reconnaissance de modèles peut être utilisée comme base de compression de textes et d'images. Mais l'information d'un fichier audio est plutôt chaotique et c'est pourquoi ces méthodes ne conviennent pas.

La compression audio avec perte d'information fait donc appel à d'autres stratégies, comme les méthodes psycho-acoustiques par exemple. L'une d'elles consiste à identifier et éliminer l'information « peu représentative pour la perception » (l'expression étant évidemment sujette à discussion), c'est-à-dire des sons qui, a priori, ne seraient pas perçus ou difficilement.

Une autre méthode est celle du *noise shaping*, qui essaye de déplacer le bruit dans des domaines de fréquences qui ne perturbent pas la perception de l'auditeur, qui entend ainsi un signal « plus propre ».

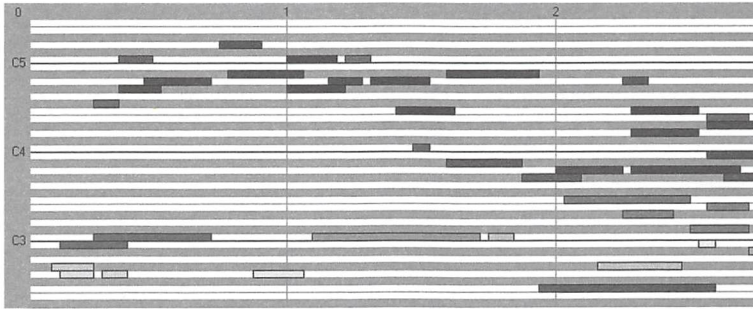
On peut évidemment toujours faire appel à des méthodes qui réduisent le taux d'échantillonnage ou la quantité de bits de codage.

MIDI

Le *Musical Instrument Digital Interface*, « Interface numérique pour instruments de musique ») ou, en abrégé, MIDI, est un protocole d'instructions créé en 1982 qui permet à certains dispositifs comme les ordinateurs et les claviers électroniques de communiquer entre eux et de se synchroniser.

Les instructions MIDI peuvent être stockées dans des fichiers exécutables à tout moment, qui, ne contenant que des instructions, ont une taille bien plus petite que les fichiers audio. Un fichier MIDI fonctionne comme une partition numérique. Il est constitué d'une série d'événements ou d'ordres émis au cours du temps. Ceux-ci contrôlent une grande quantité de variables sonores : la hauteur, l'intensité, le vibrato et le panoramique stéréo (*panning* en anglais), entre autres.

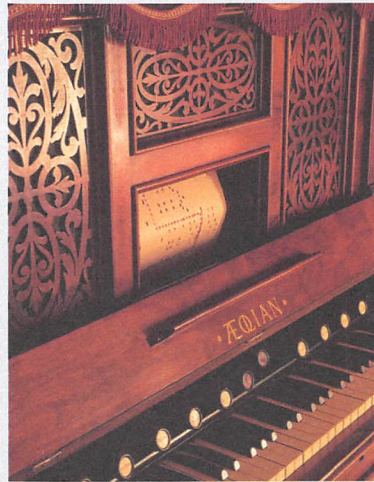
Les instructions d'un fichier pourraient indiquer, par exemple, de commencer par un *do* au piano d'une certaine intensité, puis, à l'instant 1, de l'arrêter et de faire un *ré* de la moitié de l'intensité du *do*, etc. Cette simplicité en a fait un outil très pratique pour la composition musicale. Un pianiste peut s'asseoir simplement devant un clavier MIDI et tout ce qu'il aura joué sera enregistré dans un fichier qu'il pourra modifier ou adapter facilement comme il le souhaite.



Exemple de « partition numérique ». Dans cette matrice, le temps est représenté sur l'axe horizontal. Chaque rectangle représente un laps de temps pendant lequel chaque ligne joue le rôle d'une ligne ou d'un interligne de portée d'une partition conventionnelle.

LES ANCÊTRES DE MIDI

Avec l'évolution de la mécanique, des dispositifs et des leviers furent installés sur les instruments à cordes, et des soupapes et des tubes sur les instruments à vent. De tels aménagements ouvrirent la voie à leur automatisation. Les premiers essais d'automatisation d'instruments de musique datent pourtant de l'Antiquité. De tous les dispositifs essayés, le rouleau de papier des pianos mécaniques et des orgues de Barbarie constitue la première méthode permettant de conserver des informations sonores. Les rouleaux de papier comportent des perforations et des traits de coupe longitudinaux, et représentent une partition du morceau de musique : le temps qui sépare deux sons consécutifs est déterminé par la distribution longitudinale des trous sur le rouleau, et la hauteur de la note, par la position du trou par rapport à une ligne perpendiculaire au mouvement. Lorsqu'il y a un trou, il y a une note : un 1. Lorsqu'il n'y a pas de trou, pas de note : un 0. Le rouleau est en quelque sorte une carte de codage binaire et constitue le premier support d'information utilisé pour reproduire automatiquement un morceau de musique.



Piano mécanique.

L'orchestre

Pour être jouée, une partition MIDI nécessite un orchestre, soit un système qui reçoit les ordres stockés dans le fichier et qui dispose des sons requis dans sa banque de sons, ou qui sache les créer à partir de ces derniers.

Ces sons peuvent bien évidemment provenir d'instruments réels. La banque des sons correspondant au piano peut être composée de toutes les notes de l'instrument, enregistrées dans un fichier audio. Il en va de même pour tout autre instrument ou son dont on veut disposer. Parfois, on n'enregistre pas toutes les notes mais, par exemple, une sur trois et les autres sont créées numériquement à partir de celles-ci. En revanche, il est courant d'enregistrer plus d'une version de chaque note, avec différentes intensités, des jeux distincts, avec ou sans la pédale, etc.

Les sons s'obtiennent aussi par « synthèse », c'est-à-dire qu'ils sont créés artificiellement soit à partir de rien, soit par transformations d'autres sons. En général, les dispositifs MIDI utilisent le système d'accords de la gamme tempérée (voir premier chapitre), mais ils sont assez souples pour être accordés selon d'autres systèmes d'accords.

Quantification

La musique jouée sur un clavier MIDI, enregistrée en temps réel, génère une partition numérique à laquelle on peut ensuite apporter toute sorte de corrections, d'adaptations, d'améliorations, etc. Cette opération peut être considérée comme une « quantification », un tamis qui va diviser le morceau en temps et en subdivisions exactes de ces temps. Ce procédé est très semblable à celui de la quantification des impulsions électriques lorsqu'on numérise un signal audio : chaque instruction est rapprochée de la position supposée la plus « logique » par rapport à la note que le musicien a jouée. Malgré tout, ces corrections automatiques se fondent sur des critères de précision qui peuvent facilement altérer la nature de l'interprétation originale.

Chapitre 5

Mathématique de la composition

L'artiste doit mener une vie réglée. Voici l'horaire exact de mes tâches quotidiennes : je me lève à 7h18. Je suis inspiré de 10h23 à 11h47. Je déjeune à 12h11 et je débarrasse la table à 12h14. Je fais une promenade hygiénique à cheval de 13h19 à 14h53. Je suis de nouveau inspiré de 15h12 à 16h07. Occupations diverses (escrime, méditations, immobilité, visites, contemplation, détresse, natation, etc.) de 16h21 à 18h47. Le dîner est servi à 19h16 et se termine à 19h20. Ensuite, lectures symphoniques à voix haute de 20h09 à 21h59. Je me couche habituellement à 22h37. Toutes les semaines, je me réveille en sursaut à 3h19 (le mardi).

Erik Satie

Jusqu'à présent, nous avons vu comment les mathématiques permettent de décrire et d'extraire les caractéristiques intrinsèques de la musique et du discours musical. Dans ce chapitre, il en va autrement : cette fois, ce sont les mathématiques qui mènent la danse, au fur et à mesure que les avant-gardes apparues au début du siècle dernier ont approfondi leur exploration des confins de la tonalité musicale.

Égalitarisme tonal : le dodécaphonisme

Vers le début du ^{XX}e siècle, la musique tonale était entrée en crise. Dans leur recherche d'une expressivité maximum, des compositeurs comme Liszt et surtout Wagner et Richard Strauss avaient poussé les principes harmoniques du chromatisme et de l'ambiguïté harmonique pratiquement aux limites de la dissolution de la tonalité. Au cours de ce processus apparut alors une musique « atonale », c'est-à-dire qui ne présentait pas de centre tonal. Arnold Schönberg (1874-1951) fut l'un des compositeurs qui s'aventura dans cette voie. Plus tard, au début des années 1920, le musicien autrichien élaborait une technique de composition qu'il baptisa « dodécaphonisme », à laquelle adhèrent d'autres compositeurs du groupe appelé Seconde École de Vienne, et parmi eux, Alban Berg et Anton von Webern.

Qu'est-ce que le dodécaphonisme ?

Le terme « dodécaphonique », ou « à douze sons » se réfère aux différents sons qui existent dans le système musical occidental (*dodeca* veut dire « douze » en grec). Ils correspondent aux sept touches blanches et cinq touches noires du piano. L'utilisation de ces douze sons doit répondre à deux considérations importantes :

- le système dodécaphonique unifie définitivement des sons qui étaient jusqu'à considérés comme différents, comme *fa dièse* et *sol bémol* par exemple, et utilise alors l'un ou l'autre indifféremment, comme s'ils étaient équivalents.
- lorsqu'on parle de l'un des douze sons, on considère tous ceux de sa classe : parler d'un *do* ne fait référence à aucun *do* en particulier mais bien à toutes les notes *do* des différentes octaves, une quelconque de ces notes pouvant être prise comme représentant toutes celles de la classe. De là le fait qu'on ne parle « que » de douze sons.

La technique dodécaphonique préserve l'idée de musique atonale : se libérer du poids de la hiérarchie tonale d'une note, la tonique, par rapport aux autres. Le dodécaphonisme élaborait une méthode qui permettait d'éviter la prépondérance d'une note sur toutes les autres, en assignant à chacune la même valeur relative et en organisant la musique pour qu'elles apparaissent toutes à peu près autant de fois dans la composition.

NON AU TRIDÉCAPHONISME

Schönberg, le père du système dodécaphonique de composition musicale, souffrait étrangement de la phobie du nombre 13. L'origine de cette phobie est relativement incertaine mais elle est présente depuis des temps reculés, puisqu'elle existait chez les Vikings et que la tradition chrétienne l'associait à Judas, assis à la treizième place à la table de la Cène. Dans la Perse antique, ce nombre était rattaché au chaos. La peur irrationnelle du nombre 13 peut pousser à des extrémités vraiment incroyables : plusieurs villes dont les rues sont numérotées n'ont pas de 13^e rue et de nombreux immeubles n'ont pas de treizième étage. En Formule 1, aucun monoplace connu ne porte ce nombre. L'acteur américain Stan Laurel, le « maigrichon » du célèbre duo de Laurel et Hardy, s'appelait en fait Stan Jefferson et il changea de nom par superstition, parce que celui-ci comptait 13 lettres. Quelques musiciens ont aussi fait preuve

Séries

Pour y arriver, la méthode impose une série de règles de composition. Par exemple, pour éviter que la mémoire de l'auditeur ne se fixe sur des notes en particulier plutôt que sur d'autres, les compositions doivent présenter des cycles complets faits des douze notes disponibles. Une fois qu'elle a été utilisée, la note ne peut réapparaître que lorsque les autres notes du cycle de douze l'ont été également.

Les notes des cycles n'apparaissent pas de manière désordonnée. Chaque composition est structurée à partir d'une « série », c'est-à-dire une séquence précisément ordonnée des douze notes disponibles.

Mais la série ne se résume pas à un simple ordonnancement à des fins statistiques, elle fait également l'objet d'un traitement motivique traditionnel. Sous cet aspect, le dodécaphonisme se revendique comme étant dans la droite ligne de la tradition musicale occidentale. La série suivante apparaît dans la *Suite* op. 25 de Schönberg, l'une des premières œuvres à utiliser le système des douze sons.



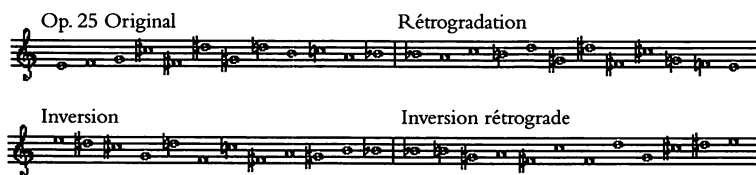
Le compositeur travaille sa série avec d'autres séries connexes ou dérivées, obtenues selon les principes compositionnels des transformations que nous

de cette forme de superstition : l'Américain John Mayer, dans son disque *Room for Squares*, enregistra 14 pistes, mais il laissa deux secondes de silence sur la piste 13, ce qui évite de la noter dans la numérotation.

Arnold Schönberg naquit le 13 septembre 1874. Il rebaptisa son opéra *Moses und Aaron* en *Moses und Aron* pour éviter ainsi que le titre ne comptât 13 lettres. Il avait peur de mourir une année multiple de 13, et, en 1950, quand il atteint l'âge de 76 ans ($7 + 6 = 13$), il entra en dépression. Il mourut finalement le vendredi 13 juillet 1951.

Alban Berg aurait été pour sa part obsédé par le nombre 23, qu'il considérait comme « fatal ». Pourtant, ce nombre est très présent dans sa *Suite lyrique* : plusieurs sections de l'œuvre comportent des mesures multiples de 23, de même que les indications métronomiques.

avons vues au chapitre 3 : l'inversion ou renversement, la rétrogradation et la transposition.



Une quatrième transformation a été rajoutée à leur panoplie par certains compositeurs : la « rotation ». Si l'on donne à la série une forme circulaire en reliant la dernière note avec la première, la rotation consiste à commencer la série par n'importe quelle note de cette série.

L'écriture dodécaphonique est loin d'être aussi stricte que le suggère l'usage des séries. Elles sont la colonne vertébrale du dodécaphonisme mais chaque compositeur les a adaptées selon ses besoins. En partant de la série, les compositeurs ont eu recours à différentes pratiques : écrire ses notes dans différents octaves ou sur différents instruments, la commencer, elle ou ses transformées, avant la fin du cycle précédent, inclure des passages d'écriture libre, travailler avec des séries dérivées, construites à partir de fragments de la série de base, etc.

COMBIEN EXISTE-T-IL DE SÉRIES DISTINCTES ?

La première note de la série peut être n'importe laquelle des douze notes disponibles. Une fois cette première note choisie, la suivante peut être n'importe laquelle des onze restantes, soit 12×11 possibilités. Une fois les deux premières notes choisies, la suivante peut être n'importe laquelle des dix restantes, soit $12 \times 11 \times 10$ possibilités. En continuant ce raisonnement, on obtient un total de $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = 479\,001\,600$ séries distinctes. Ce nombre s'appelle « factorielle de 12 » et s'écrit $12!$. De manière générale, pour tout entier positif n , la factorielle n est définie comme le produit de tous les entiers positifs de 1 à n , soit $n! = n(n-1) \times \dots \times 2 \times 1$. Dans le cas des séries dodécaphoniques, c'est un peu plus compliqué d'en faire le compte car, pour obtenir les séries « essentiellement » distinctes, il faut enlever les transpositions, les formes inversées, les formes rétrogrades et les formes résultant de combinaisons de ces transformations. Un décompte minutieux en donne 9 985 920.

Forme numérique et forme matricielle

Les partitions écrites sur les portées traditionnelles suivent la logique de la musique diatonique. La distance entre les lignes et les interlignes consécutifs ne représente pas toujours la même distance musicale : elle correspond parfois à un demi-ton, de *mi* à *fa* par exemple, et parfois à deux demi-tons, comme de *ré* à *mi*. Cela oblige à utiliser les altérations pour écrire la musique dodécaphonique. Pour cela, comme on a pu le voir dans les exemples précédents, les inversions et les rétrogradations des séries dodécaphoniques ne se « voient » pas sur les partitions, même si l'on continue à les utiliser.

Une série peut aussi être représentée sous une forme numérique, ce qui simplifie le travail préparatoire de l'écriture motivique à partir des séries et de leurs séries connexes. Lorsque l'on veut représenter numériquement une série, on choisit en général une note initiale qui sert de référence. Dans l'exemple suivant, cette note de référence est le *mi*, auquel on attribue la valeur 0. Les notes au-dessus se verront numérotées successivement et par demi-ton : *fa*, 1 ; *fa dièse*, 2 ; *sol*, 3, etc. Chaque note de la série reçoit un numéro indiquant la classe à laquelle elle appartient.



Représenter une série de notes sous forme numérique permet d'employer des outils arithmétiques pour calculer les séries connexes. Par exemple, pour la transposer, il suffit d'ajouter une même valeur k à chacun des éléments de la série :

$$T_k(s_1, s_2, \dots, s_{12}) \rightarrow (s_1 + k, s_2 + k, \dots, s_{12} + k)$$

$$T_0(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6)$$

$$T_1(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (1, 2, 4, 10, 3, 0, 5, 11, 8, 9, 6, 7)$$

$$T_2(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (2, 3, 5, 11, 4, 1, 6, 0, 9, 10, 7, 8)$$

$$\vdots$$

$$T_7(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (7, 8, 10, 4, 9, 6, 11, 5, 2, 3, 0, 1)$$

$$\vdots$$

$$T_{11}(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (11, 0, 2, 8, 1, 10, 3, 9, 6, 7, 4, 5).$$

Après le onze, on recommence à zéro, comme pour le calcul des heures de la journée : 7 heures après 8 heures du matin, il est 3 heures de l'après-midi.

En mathématiques, ce type d'opérations sur des ensembles réduits de nombres s'appelle l'« arithmétique modulaire ». Dans le cas des séries dodécaphoniques, l'ensemble est constitué des 12 nombres compris entre 0 et 11. On appelle module, le nombre d'éléments de l'ensemble, soit ici, 12. Ainsi, en arithmétique modulo 12, 13 est équivalent à 1 et on l'écrit :

$$13 \equiv 1 \pmod{12}.$$

Tous les nombres de la forme $12k + 1$, avec k entier, sont ainsi égaux à 1 :

$$25 \equiv 1 \pmod{12}.$$

$$37 \equiv 1 \pmod{12}.$$

$$49 \equiv 1 \pmod{12}.$$

$$61 \equiv 1 \pmod{12}.$$

⋮

Comme nous l'avons déjà vu, le dodécaphonisme ne fait pas de distinction entre des notes identiques appartenant à des octaves différentes. L'arithmétique modulo 12 respecte cette règle puisque le numéro 1, un *fa* dans notre exemple, équivaut à 13, qui est de nouveau un *fa*.

En appliquant les règles de l'arithmétique modulaire, inverser une série revient à assigner à une valeur comprise entre 0 à 11, donc à chacune des notes, la différence entre cette valeur et 12. Le numéro 1 de la série se transforme en 11, le 2 en 10, le 3 en 9... Ainsi dans le cas de notre exemple :

$$I(s_1, s_2, \dots, s_{12}) \rightarrow (s_1, 12-s_2, \dots, 12-s_{12})$$

$$I(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (0, 11, 9, 3, 10, 1, 8, 2, 5, 4, 7, 6).$$

La rétrogradation s'obtient en « retournant » la série numérique de droite à gauche :

$$R(s_1, s_2, \dots, s_{12}) \rightarrow (s_{12}, s_{11}, \dots, s_1)$$

$$R(0, 1, 3, 9, 2, 11, 4, 10, 7, 8, 5, 6) \rightarrow (6, 5, 8, 7, 10, 4, 11, 2, 9, 3, 1, 0).$$

La série originale, sa forme inverse, sa forme rétrograde et l'inverse de sa forme rétrograde ainsi que les douze transpositions possibles de ces quatre dernières, fournissent au compositeur une palette de $4 \times 12 = 48$ permutations disponibles (si l'on considère aussi les rotations, on arrive au nombre $48 \times 12 = 576$).

Ces 48 formes peuvent être réunies dans une matrice de 12 par 12, en suivant les règles suivantes :

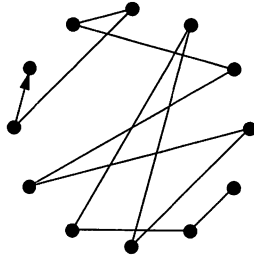
- Sur la première ligne T_0 , on note la série originale (en gras dans l'exemple).
- Dans la première colonne I_0 , l'inverse de la série (en gras également).
- Dans chacune des cases suivantes, on porte la somme (modulo 12) des nombres qui se trouvent au début de la ligne et de la colonne. Par exemple, la cinquième ligne commence par un 10 et la quatrième colonne par un 9. La case au croisement de cette ligne et de cette colonne comportera un 7, car $10 + 9 = 19 \equiv 7 \pmod{12}$.

Ainsi, les douze lignes comportent la série originale et toutes ses transpositions, et les douze colonnes, la série inversée et toutes ses transpositions. Les formes rétrogrades de ces vingt-quatre séries se trouvent en parcourant la matrice dans l'autre sens : les lignes de droite à gauche et les colonnes de bas en haut.

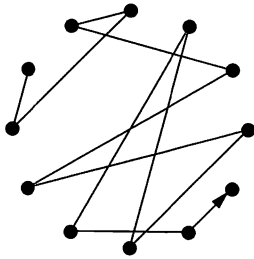
	I_0	I_1	I_3	I_9	I_2	I_{11}	I_4	I_{10}	I_7	I_8	I_5	I_6	
T_0	0	1	3	9	2	11	4	10	7	8	5	6	R_0
T_{11}	11	0	2	8	1	10	3	9	6	7	4	5	R_{11}
T_9	9	10	0	6	11	8	1	7	4	5	2	3	R_9
T_3	3	4	6	0	5	2	7	1	10	11	8	9	R_3
T_{10}	10	11	1	7	0	9	2	8	5	6	3	4	R_{10}
T_1	1	2	4	10	3	0	5	11	8	9	6	7	R_1
T_8	8	9	11	5	10	7	0	6	3	4	1	2	R_8
T_2	2	3	5	11	4	1	6	0	9	10	7	8	R_2
T_5	5	6	8	2	7	4	9	3	0	1	10	11	R_5
T_4	4	5	7	1	6	3	8	2	11	0	9	10	R_4
T_7	7	8	10	4	9	6	11	5	2	3	0	1	R_7
T_6	6	7	9	3	8	5	10	4	1	2	11	0	R_6
	R_{I_0}	R_{I_1}	R_{I_3}	R_{I_9}	R_{I_2}	$R_{I_{11}}$	R_{I_4}	$R_{I_{10}}$	R_{I_7}	R_{I_8}	R_{I_5}	R_{I_6}	

Forme circulaire

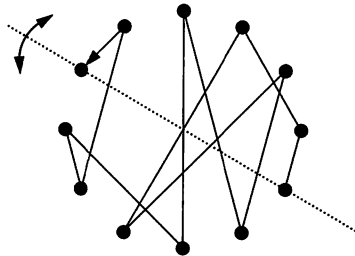
La représentation circulaire de la série est particulièrement utile dans l'étude du dodécaphonisme. Voici, par exemple, la représentation circulaire de la série de l'op. 25 de Schönberg avec laquelle nous venons de travailler :



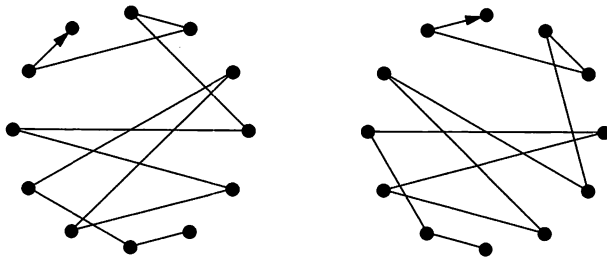
Pour obtenir sa forme rétrograde, il suffit d'inverser le sens de lecture :



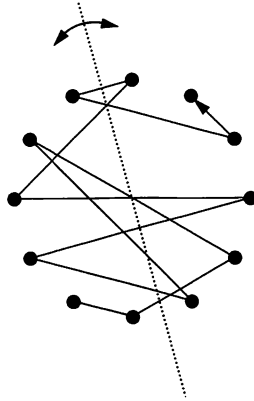
Pour obtenir sa forme inversée, il suffit d'appliquer la symétrie par rapport à l'axe passant par le ton de référence :



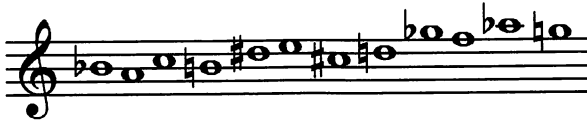
Pour la transposer, il suffit de la tourner d'autant d'« heures » que souhaité :



La forme inverse de sa transposée s'obtient en la symétrisant par rapport à l'axe adéquat :

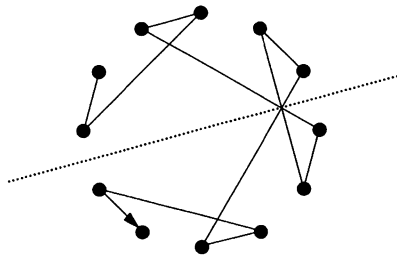


La forme circulaire permet de mieux apprécier la structure interne de certaines séries. Voici par exemple celle du *Quatuor pour cordes* op. 28 d'Anton Webern qui, comme nous l'avons vu précédemment, est construite sur le thème BACH :

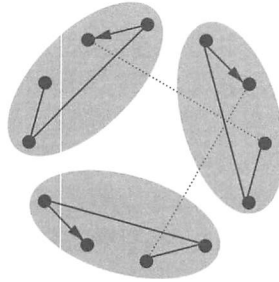


Sa forme circulaire permet d'en voir bien plus clairement la symétrie. Sur la figure, on a marqué avec des pointillés l'axe de symétrie de la série, dont chaque moitié est la forme rétrograde transposée de l'autre. La série *S* est donc la forme inverse rétrograde, transposée de trois demi-tons descendants. En d'autres termes, cette série s'obtient en appliquant à l'originale les fonctions de rétrogradation (*R*), d'inversion (*I*) et de transposition (*T*), cette dernière trois fois :

$$S = T^3(I(R(S))).$$



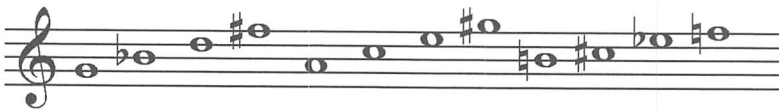
Le thème BACH, déjà lui-même symétrique, apparaît trois fois : la première fois dans sa forme naturelle, la deuxième dans sa forme inversée et transposée, puis la troisième fois, transposé à nouveau :



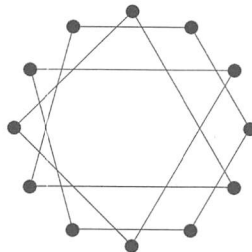
Dans la représentation circulaire, les rotations apparaissent en liant la dernière note à la première, fermant ainsi un « circuit », et elles peuvent démarrer de n'importe quel point de ce circuit.

Alban Berg

Le troisième compositeur de référence de la Seconde École de Vienne fut Alban Berg (1885-1935). Grâce à un langage musical intense, l'usage des techniques dodécaphoniques ne l'a pas empêché de composer des pièces extrêmement expressives. Parmi ses œuvres les plus connues, on trouve les opéras *Wozzeck* et *Lulu*, la *Suite lyrique pour cordes* et son *Concerto pour violon*. Voici la série de cette dernière composition :

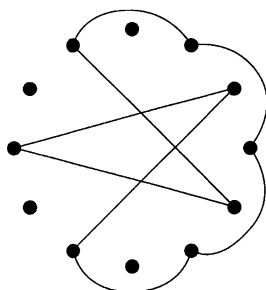


Si on la met sous forme circulaire, en reliant la dernière et la première note, on est surpris par sa symétrie :



Elle fait preuve d'une résonance tonale qui devient évidente si on la met sous forme numérique (0, 3, 7, 11, 2, 5, 9, 1, 4, 6, 8, 10). Elle enchaîne les quatre accords majeurs et mineurs, reconstituant une partie du cercle des quintes : 0-7, 7-2, 2-9 et 9-4. Le circuit s'achève par quatre tons qui se suivent.

Le graphique suivant montre cet enchaînement des quintes, en éliminant quelques éléments intermédiaires :



Sérialisme, contrôle et chaos

Le dodécaphonisme a ouvert la voie à une composition musicale fortement influencée par divers modèles mathématiques. Les principes des séries, appliqués aux hauteurs des notes, ne tardèrent pas à concerner d'autres paramètres de la musique. Le but premier était d'empêcher statistiquement qu'une hauteur soit prépondérante sur les autres. Pourquoi ne pas faire la même chose avec les autres paramètres, l'intensité, la durée, le timbre, le registre ? La méthode est fondamentalement identique à celle appliquée aux hauteurs. Pour travailler les intensités, on prépare un tableau où sont énumérés les douze niveaux d'intensité, depuis le « quadruple pianissimo » au « quadruple fortissimo ». Ces éléments permettent d'élaborer une série des intensités que l'on pourra ensuite traiter sous forme sérielle :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>pppp</i>	<i>ppp</i>	<i>pp</i>	<i>p</i>	<i>quasi p</i>	<i>mp</i>	<i>mf</i>	<i>quasi f</i>	<i>f</i>	<i>ff</i>	<i>fff</i>	<i>ffff</i>

De la même façon, il est possible de sérialiser les durées des notes ou tout autre paramètre musical, puis d'appliquer les procédés mathématico-musicaux souhaités. Le compositeur français Pierre Boulez (né en 1925) ou l'Allemand

Karlheinz Stockhausen (1928-2007) sont parmi ceux qui ont fait un usage systématique des séries appliquées à divers paramètres de la musique et représentent ce courant baptisé « sérialisme intégral ».

Boulez développa un procédé de « multiplication de blocs ». Chacun des deux blocs harmoniques A et B est un accord, un ensemble déterminé de hauteurs. Le bloc A est transposé en prenant chacune des notes de B comme note inférieure. Le produit $A \times B$ est l'union harmonique de toutes ces transpositions.

The diagram illustrates the 'multiplication of blocks' process. It shows two rows of musical notation. The first row shows block A (a triad in G major) and block B (a triad in D major), followed by the result $A \times B$, which is the union of all transpositions of A onto the notes of B . The second row shows the same blocks transposed to a different key (A major and D major), followed by the resulting $A \times B$ product.

Ce procédé a été appliqué par Boulez dans son œuvre *Le marteau sans maître* en divisant une série en cinq blocs a , b , c , d et e qui se multipliaient selon le procédé décrit précédemment :

The musical notation shows a single melodic line divided into five segments labeled a , b , c , d , and e , representing the blocks used in the multiplication process.

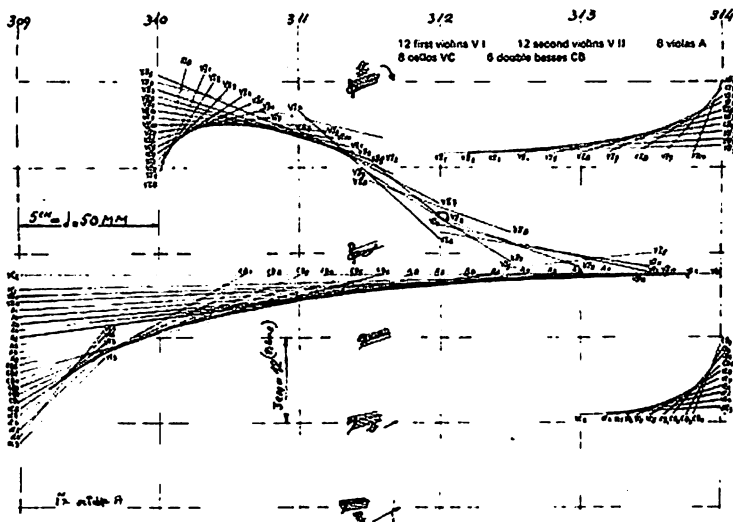
C'est un exemple intéressant de transposition d'un concept mathématique, dans ce cas la multiplication, à un domaine où son application pourrait paraître dénuée de sens. Pourtant, tous ces efforts n'ont pas porté beaucoup de fruits. Le sérialisme, en restreignant le processus compositionnel à un simple jeu abstrait et isolé, rendit les compositions pratiquement impossibles à « décoder » en termes musicaux. Boulez lui-même reconnut ce problème au sujet de son œuvre *Structures I* :

« J'ai voulu éliminer de mon vocabulaire toute trace de conventionnalisme, tant au niveau des rythmiques et des phrases que du développement et de la forme. J'ai voulu ensuite retrouver, élément par élément, les différentes étapes du processus compositionnel, de manière à ce qu'apparaisse une nouvelle synthèse, qui ne soit pas polluée au départ par des organismes étrangers, tels des réminiscences d'un style en particulier. »

Musique stochastique

Le compositeur roumain d'origine grecque, Iannis Xenakis (1922–2001), critiqua le sérialisme car, selon lui, toute planification sérielle et indépendante des différents paramètres musicaux (hauteurs, durées, intensités, etc.) finit par isoler ces composantes et empêcher qu'elles interagissent. L'organisation en parallèle des différentes séries pourrait se comparer à la notion de polyphonie conceptuelle, avec un auditeur idéal susceptible d'apprécier le développement de chaque série, comme il le ferait en suivant les différentes lignes mélodiques d'une œuvre traditionnelle. Mais le résultat ressemblait plutôt à un ensemble d'éléments disparates composant une masse sonore, unique et globale.

Xenakis, qui était aussi architecte, chercha, par ses méthodes de composition, à produire une musique qui rétablirait une cohérence entre l'esthétique et la nature. Sa musique est perçue par celui qui l'écoute comme des « nuages sonores », évoluant dans le temps. Ces nuages sont constitués d'innombrables particules sonores, qui, prises une à une, n'ont que peu d'importance, mais qui contribuent statistiquement au tout. Une fois tracées les grandes lignes de l'œuvre, la distribution de ces particules se fonde sur un ensemble d'outils et de modèles mathématiques très sophistiqués, faisant appel à des méthodes probabilistes et algébriques, à la théorie des groupes et à celle des jeux.



Partition de *Metastasis*, de Iannis Xenakis.

Une partie de dés avec Mozart

Wolfgang Amadeus Mozart (1756-1791) et Joseph Haydn (1732-1809) sont les compositeurs les plus connus de la période dite classique. Malgré une esthétique apparemment très accessible, la musique de cette époque était régie par des règles de composition très strictes que les deux musiciens maîtrisaient à la perfection.

L'essor de la musique de la période classique coïncide avec le temps de gestation de la Révolution industrielle, avec ses machines capables d'automatiser les processus de production et de remplacer à grande échelle le travail humain. L'organisation sociale et économique connut alors le même type de changements et la notion de production en série s'imposa dans l'imaginaire populaire.

Johann Philipp Kirnberger (1721-1783) fut un compositeur et un théoricien de la musique, élève de Bach, qui créa plusieurs tempéraments portant son nom. En 1757, il publia une série de jeux systématisant la composition musicale et permettant à n'importe qui de composer des morceaux sans même avoir de connaissances musicales.

Mozart et Haydn participèrent à ces amusements et créèrent leur propre « jeu de dés » musical, le *Musikalisches Würfelspiel*. La grille suivante, qu'on attribue à Mozart, comporte 176 mesures composées, numérotées et réparties en deux tableaux. Chaque tableau est composé de 16 colonnes. Il faut choisir un nombre dans chacune d'entre elles, au hasard, en lançant deux dés classiques à six faces.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	96	22	141	41	105	122	11	30	70	121	26	9	112	49	109	14
3	32	6	128	63	146	46	134	81	117	39	126	56	174	18	116	83
4	69	95	158	13	153	55	110	24	66	139	15	132	73	58	145	79
5	40	17	113	85	161	2	159	100	90	176	7	34	67	160	52	170
6	148	74	163	45	80	97	36	107	25	143	64	125	76	136	1	93
7	104	157	27	167	154	68	118	91	138	71	150	29	101	162	23	151
8	152	60	171	53	99	133	21	127	16	155	57	175	43	168	89	172
9	119	84	114	50	140	86	169	94	120	88	48	166	51	115	72	111
10	98	142	42	156	75	129	62	123	65	77	19	82	137	38	149	8
11	3	87	165	61	135	47	147	33	102	4	31	164	144	59	173	78
12	54	130	10	103	28	37	106	5	35	20	108	92	12	124	44	131

	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	72	6	59	25	81	41	89	13	36	5	46	79	30	95	19	66
2	56	82	42	74	14	7	26	71	76	20	64	84	8	35	47	88
3	75	39	54	1	65	43	15	80	9	34	93	48	69	58	90	21
4	40	73	16	68	29	55	2	61	22	67	49	77	57	87	33	10
5	83	3	28	53	37	17	44	70	63	85	32	96	12	23	50	91
6	18	45	62	38	4	27	52	94	11	92	24	86	51	60	78	31

Le joueur-compositeur commence par lancer les dés, dont la somme donne un nombre entre 2 et 12. Ce nombre indique une ligne de la colonne 1. Par exemple, si en lançant les dés il obtient un 3 et un 5, donc un 8, il doit choisir le nombre en ligne 8, soit le 152. Ce nombre fait référence à la mesure 152 qui sera la première de son « œuvre ». En réitérant ce procédé pour chacune des colonnes, avec un seul dé pour le second tableau, il obtient les 32 mesures de la composition.

Combien d'œuvres possibles ?

Combien d'œuvres distinctes peut générer ce jeu ? Il y a 11 possibilités pour la première mesure, correspondant aux onze valeurs possibles des dés, de 2 à 12. Pour chacune d'entre elles, il existe 11 manières de choisir la deuxième mesure, soit au total, $11 \times 11 = 11^2 = 121$.

Pour chacune d'entre elles, il existe 11 manières de choisir la troisième mesure, soit au total, $11^2 \times 11 = 11^3 = 1\,331$.

OULIPO

Au xx^e siècle, un procédé combinatoire similaire fut employé par l'écrivain français Raymond Queneau qui, avec le mathématicien François Le Lionnais, fonda en 1960 l'Oulipo, acronyme d'« Ouvroir de littérature potentielle ». Son œuvre *Cent mille milliards de poèmes* comporte dix sonnets, dont chacun des quatorze vers peut être combiné à n'importe quel autre vers des autres sonnets. Il existe 10 possibilités pour le premier vers, 10 possibilités pour le deuxième, etc. Ce qui donne un total de 10^{14} sonnets, d'où le nom de l'œuvre.

À chaque mesure du menuet, les possibilités sont multipliées par 11 et à chaque mesure du trio, elles sont multipliées par 6. Au total, on peut générer avec ce jeu $11^{16} \times 6^{16} = 129\,629\,238\,163\,050\,258\,624\,287\,932\,416 \simeq 1,3 \times 10^{29}$ « œuvres » distinctes. Pour les interpréter toutes, l'une après l'autre, sans s'arrêter et en comptant 30 secondes pour chacune, il faudrait 123 000 milliards d'années.

En fait, si le but recherché est de produire une musique variée, le jeu est mal défini au niveau du calcul de probabilités. En lançant deux dés, les résultats possibles de 2 à 12 ne sont pas équiprobables : six combinaisons donnent 7 alors que 2 et 12 ne correspondent qu'à une combinaison chacun, comme on peut le voir sur le tableau suivant.

Résultat	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Combinaisons	1+1	1+2 2+1	1+3 2+2 3+1	1+4 2+3 3+2 4+1	1+5 2+4 3+3 4+2 5+1	1+6 2+5 3+4 4+3 5+2 6+1	2+6 3+5 4+4 5+3 6+2	3+6 4+5 5+4 6+3	4+6 5+5 6+4	5+6 6+5	6+6
Total	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1

Copier les maîtres

L'enseignement de la composition se fait souvent en demandant à l'élève d'écrire une œuvre dans le style des grands compositeurs : une fugue à la manière de Bach, un mouvement de sonate dans le style de Beethoven ou un prélude dans celui de Debussy.

Prenons comme exemple Beethoven. En copiant le style, l'élève apprend à maîtriser les différentes techniques compositionnelles qui font que la musique ressemble à celle de Beethoven. Mais en quoi consiste le « style Beethoven » ? On peut citer quelques règles : la manière de travailler les motifs thématiques et de développer l'harmonie, l'utilisation des silences ou des contrastes dynamiques, d'intervalles mélodiques plus ou moins grands, etc.

On peut étudier statistiquement les dimensions musicales d'un style. Prenons par exemple les motifs thématiques des sonates de Beethoven. On peut les caractériser statistiquement par l'amplitude du registre qu'ils occupent, c'est-à-dire l'intervalle entre la note la plus grave et la plus aiguë. Une étude statistique

donnerait le nombre des motifs d'amplitude maximale d'un demi-ton, de 2, de 3, de 4... Ou encore, quel serait le minimum d'amplitude utilisé par Beethoven, soit la première valeur non nulle de cette suite de nombres ? On pourrait ainsi décrire tout autre paramètre.

Mais, bien que ces méthodes statistiques permettent de recréer une ambiance générale, elles ne sont pas sensibles au contexte. Lorsque l'on cherche à recréer un style, la distribution des notes n'est peut-être pas le paramètre le plus important : cela ne sert à rien de savoir combien de *do* il y a, si l'on écrit tous ces *do* au début. Il est bien plus important de savoir comment les enchaîner que de connaître le nombre exact de leurs apparitions.

Les « chaînes de Markov » sont un outil mathématique qui propose une solution approchée de ce problème. La technique consiste à étudier la succession des « états » différents que peut prendre un système puis à les reproduire statistiquement. En l'appliquant à la composition mélodique, elle permet de reproduire les modèles qui régissent le choix des notes qui suivent l'apparition d'une certaine note.

L'anniversaire de Markov

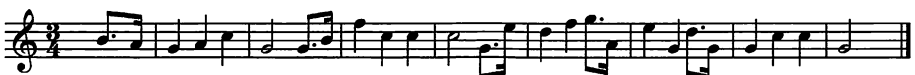
L'exemple suivant montre comment utiliser les chaînes de Markov pour composer une mélodie du « style » de celle de « Joyeux anniversaire ».



Le tableau suivant donne le nombre d'apparitions de chaque note dans la mélodie :

Sol	La	Si	Do	Ré	Mi	Fa	Sol'
8	3	2	6	2	2	2	1

Il semble que les notes d'une mélodie du même style devraient respecter la même distribution, mais en fait, la mélodie aura peu de chances de ressembler à l'originale.



Au lieu d'analyser le nombre d'apparitions de chaque note, les chaînes de Markov permettent d'étudier comment elles se succèdent. Les 26 notes de la mélodie originale s'enchaînent selon 25 voisinages ou transitions : la première transition est *sol-sol*, la deuxième est *sol-la*, etc. On a en tout $8 \times 8 = 64$ transitions différentes, mais elles ne sont pas toutes présentes dans la mélodie.

Le tableau suivant montre le nombre de transitions de chaque type :

		Note suivante								Total
		Sol'	Fa	Mi	Ré	Do	Si	La	Sol	
Note	Sol'			1						1
	Fa		1	1						2
	Mi					2				2
	Ré					2				2
	Do				1	1	2		1	5
	Si							1	1	2
	La		1						2	3
	Sol	1			1	1		2	3	8

Même si l'on choisit la première note de manière aléatoire, il lui succédera une autre et à celle-ci, encore une autre, et ainsi de suite, et toutes seront choisies au hasard, mais un hasard contrôlé par l'information sur les transitions résumées dans le tableau.

Commençons la nouvelle mélodie par un *sol*, comme l'originale. Quelles notes peuvent succéder à ce *sol* ? La dernière ligne du tableau indique que dans la mélodie originale, le *sol* a huit successeurs possibles : une fois le *sol* aigu (*sol'*) ; une autre fois *ré* ; une autre fois *do* ; deux fois *la* et trois fois le même *sol*. Attribuons un chiffre de 1 à 8 à chaque successeur possible et choisissons au hasard l'un d'entre eux pour déterminer la deuxième note : si c'est 1, ce sera *sol* aigu, si c'est 2, ce sera *ré*, si c'est 3, ce sera *do*, si c'est 4 ou 5, ce sera *la*, et *sol* si c'est 6, 7 ou 8. Supposons que sorte un 3, la deuxième note de notre mélodie sera *do*.

Le processus est réitéré avec les 5 successeurs possibles de *do* : *ré*, *do*, *si*, *si* et *sol*. Un chiffre entre 1 et 5 pris au hasard donnera la troisième note de la mélodie. Supposons que sorte le 4, nous obtenons *si* comme troisième note. Et ainsi de suite autant de fois que nécessaire. Voici une mélodie créée selon cette méthode :



Le deuxième anniversaire

Nous venons d’analyser une mélodie au moyen d’un processus de Markov de premier ordre, prenant en compte l’influence de chaque note sur la suivante. Et pourquoi ne pas évaluer l’influence de chaque couple de notes sur celle qui suit, en utilisant un processus de Markov du deuxième ordre ? Reprenons l’analyse de la mélodie originale. La première transition de deuxième ordre est *sol-sol*⇒*la*. La suivante est *sol-la*⇒*sol*.

Il existe un ensemble de $64 \times 8 = 512$ transitions possibles mais seules les suivantes sont présentes dans la mélodie :

		Note suivante								Total
		Sol'	Fa	Mi	Ré	Do	Si	La	Sol	
Couple de notes	Sol'-Mi					1				1
	Fa-Fa			1						1
	Fa-Mi					1				1
	Mi-Do				1	1				2
	Ré-Do								1	1
	Do-Ré					1				1
	Do-Do						1			1
	Do-Si							1	1	2
	Do-Sol								1	1
	Si-La		1							1
	Si-Sol								1	1
	La-Fa		1							1
	La-Sol				1	1				2
	Sol-Sol'			1						1
	Sol-Ré					1				1
	Sol-Do						1			1
	Sol-La								2	2
	Sol-Sol	1						2		3

Le processus du deuxième ordre est le même que le précédent, mais cette fois, il y a peu de manières d’« échapper » à la mélodie originale. Voici la mélodie créée avec cette méthode :



Ces mélodies cherchent à ressembler à celle de « Joyeux anniversaire » en copiant seulement la manière dont se succèdent les notes. On peut l'utiliser aussi pour copier d'autres paramètres musicaux : la durée des notes, les séquences harmoniques, les registres, l'orchestration, etc.

Le logiciel EMI

Le logiciel EMI (*Experiments in Musical Intelligence*, ou « Expérience en intelligence musicale ») copie non seulement le style de certains des plus grands compositeurs, mais il compose également ses propres œuvres.

Créé par l'Américain David Cope, EMI analyse les œuvres d'un compositeur et en prend des échantillons, des petites « cellules » musicales qu'il recombine entre elles ensuite pour en créer de nouvelles, en suivant le style du compositeur qu'il a analysé. Utilisé par un opérateur entraîné, EMI se sert de ces échantillons pour générer les tableaux, de la même manière que Mozart pour son *Musikalisches Würfelspiel*. Ensuite, pour recomposer ces échantillons isolés et créer ses propres morceaux, EMI a recours à différentes techniques d'intelligence artificielle. Des auditeurs ont été sollicités pour « juger » ces œuvres : certains furent enchantés, d'autres se mirent en colère et s'inquiétèrent même de la capacité de ces automatismes à copier le génie humain. Cope pense qu'il n'y aura plus à l'avenir de telles réactions : « En définitive, un ordinateur n'est qu'un outil qui permet de prolonger notre esprit. La musique composée par nos algorithmes est autant la nôtre que celle d'inspiration plus humaine. »

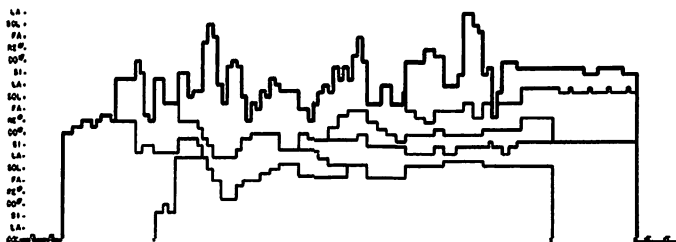
Automatiser la composition

Le logiciel de Cope nous conduit à poser une question importante : est-il possible d'automatiser le processus créatif ? Les premiers automates musicaux sont apparus bien avant le jeu de dés de Mozart. Au XVII^e siècle, Athanase Kircher inventa l'*Orgue mathématique*, premier instrument à suivre un algorithme pour composer un morceau de musique à 4 voix. Au début du XIX^e, Dietrich Nikolaus Winkel (1773-1826) inventa le *Componium*, un orgue automatique à deux rouleaux, qui fonctionnaient tour à tour de manière aléatoire. Pour commencer à répondre à cette grande question, il faudrait en savoir plus sur la source de l'inspiration des compositeurs et s'il existe des cas où cette inspiration proviendrait de processus reproductibles ou imitables.

L'inspiration

Comme bien d'autres artistes, les compositeurs tirent leur inspiration d'éléments les plus divers : une personne aimée, un fait ou un personnage historique, l'œuvre d'un autre artiste... Les concertos des *Quatre saisons* d'Antonio Vivaldi, la *Symphonie fantastique* d'Hector Berlioz ou l'*Ouverture 1812* de Piotr Tchaïkovsky sont des œuvres parmi les plus connues de ce qu'on appelle la « musique descriptive », définie comme rendant explicites les relations entre la musique et la réalité extramusicale. Dans tous les cas cités, la source d'inspiration est une référence au contexte, à l'histoire ou à la littérature appartenant à un patrimoine commun ou, au moins, à celui des contemporains du compositeur.

Mais l'inspiration ne naît pas toujours de ce que le compositeur partage avec d'autres, ou alors sous une forme altérée par sa créativité même. Ainsi, le Brésilien Heitor Villa-Lobos (1887-1959) écrivit en 1939 – et révisa en 1957 – *New York Skyline*, dont les mélodies lui furent inspirées par les silhouettes des édifices de la ville de New York, qu'il avait dessinées sur du papier quadrillé.



Sir Edward Elgar (1857-1934), pour sa part, dédia ses célèbres *Variations Enigma* op. 36 « à mes amis décrits ici ». Chacune des variations est identifiée par des initiales ou par des références à l'un de ses proches dont Elgar fit le portrait en musique. Ce n'est pourtant pas là que se trouve l'« énigme » du nom de l'œuvre, mais dans une autre qui n'a pas encore été résolue : Elgar lui-même déclare avoir « caché » une mélodie dans l'ensemble de l'œuvre. Cette mélodie mystérieuse ne s'entend jamais, comme un acteur de théâtre qui ne paraîtrait jamais sur scène alors que toute la trame serait construite autour de lui, et pourtant, toute l'œuvre lui serait constamment liée musicalement. Plusieurs « solutions » de l'énigme ont été proposées depuis la publication de cette œuvre, mais aucune n'a été suffisamment convaincante à ce jour.

Composition algorithmique

Un algorithme est une recette, un ensemble d'instructions qui explique comment résoudre un problème donné ou comment accomplir une tâche. Les mathématiques font appel aux algorithmes pour montrer comment réaliser les opérations arithmétiques élémentaires. Pratiquement tous les processus réalisés par ordinateur utilisent des algorithmes. Il existe un grand nombre de définitions rigoureuses qui donnent les caractéristiques d'un algorithme (il doit être fini, ses instructions doivent être bien définies, etc.). Mais pour notre propos, nous pouvons le définir informellement comme un ensemble d'étapes et de règles à suivre pour arriver à un résultat.

La composition algorithmique modélise mathématiquement le processus « conventionnel » de l'inspiration. Le compositeur conçoit un algorithme qui reçoit certaines informations en entrée (*input*) et en produit d'autres en sortie (*output*). Quel sens donner à un algorithme qui produit de la musique ? Il semble raisonnable de dire qu'en fait, la musique est une forme de communication par laquelle s'expriment les émotions d'une personne ou sa vision de la réalité. Alors, pourquoi avoir besoin d'une machine qui écrive de la musique ? Est-ce vraiment de la musique ? Qu'est-ce que la musique ?

Tout d'abord, bien que la musique reste un moyen par lequel s'exprime le sublime, cela fait bien longtemps qu'elle n'est plus le seul. Elle est devenue, dans beaucoup de cas, une des matières premières d'un vaste marché qui exige constamment de nouvelles chansons, de nouveaux interprètes, de nouvelles propositions... Le compositeur n'est plus alors qu'un chaînon dont on pourrait arriver à se passer. En tous cas, le fait que le compositeur ne soit pas indispensable ne remet pas en question la qualité de son travail, ni la validité de l'algorithme qui le remplace, mais met en avant la standardisation d'un système qui, auparavant, demandait peu au compositeur et maintenant n'en demande pas plus à l'algorithme.

D'autre part, concevoir un algorithme capable d'« écrire » de la bonne musique est un défi auquel les programmeurs informatiques férus de musique ont du mal à résister. On peut analyser mathématiquement les règles que suit la musique, mais on arrive toujours à une limite à partir de laquelle les explications font appel à des termes flous, comme l'inspiration, la spiritualité, la sensibilité, l'art. Est-il possible de dépasser cette limite ? Les règles de fond de la création musicale sont-elles inaccessibles à l'intelligence humaine ? Ou le jour viendra-t-il où un programmeur informatique, à l'aide de techniques mathématiques avancées, pourra, tel Prométhée, voler le feu divin de l'inspiration et le rendre accessible à tous ?

Annexe I

Concepts de base de l'écriture et de la théorie musicales

Dans cette annexe, nous allons passer en revue les concepts de base de la théorie et de la notation musicales afin de faciliter la compréhension de cet ouvrage. L'écriture musicale est un exemple d'application des mathématiques à une discipline artistique. Bien que cela ne soit pas aussi évident que dans le cas de l'apport de la géométrie au dessin, l'écriture musicale moderne comporte un ensemble important de règles et de symboles provenant des mathématiques ou susceptibles d'être interprétés au moyen de concepts mathématiques. Malgré cela, la notation musicale est loin d'être un ensemble complet ; elle est le résultat d'une lente évolution au cours de l'histoire. Récemment, on a commencé à proposer des écritures alternatives, plus efficaces, mais le modèle traditionnel étant largement accepté, le changement s'avère difficile et long à se mettre en place.

Hauteur

On appelle « hauteur » la valeur perçue d'un « ton ». Le ton caractérise le son et il est directement lié à la fréquence d'oscillation de l'onde qui le produit. Cette fréquence se mesure en hertz (Hz). La hauteur est la caractéristique qui permet de distinguer un son aigu d'un son grave (plus la fréquence est haute, plus le son est aigu) et de différencier deux notes entre elles. L'oreille humaine est capable de percevoir des vibrations dont les fréquences se situent entre 20 et 20 000 Hz. Les infrasons se trouvent en dessous de ces fréquences perceptibles, et les ultrasons au-dessus. Pour organiser entre elles les hauteurs relatives des sons, une référence a été fixée en 1939, que l'on appela « diapason normal de *la* », ou « ton de référence », dont la fréquence est 440 Hz.

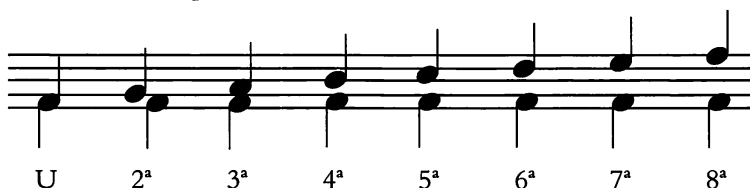
Intervalles

On appelle « intervalle » l'écart de hauteur entre deux sons perçus. Le nom des intervalles est donné par le nombre de degrés de la gamme qui séparent

les deux sons, en comptant ceux-ci. Cette définition compliquée se comprend bien mieux à l'aide d'un exemple : lorsqu'un *fa* et un *la* plus aigu sont joués ensemble, on entend un intervalle de « tierce » (*fa-sol-la*, soit trois notes). Entre un *la* et un *fa* plus aigu, c'est une « sixte » (*la-si-do-ré-mi-fa*, soit six notes).

Pour nommer les deux sons qui forment l'intervalle, on donne par convention le son le plus grave en premier, puis le son le plus aigu. Une seconde, par exemple, est constituée de deux sons qui se suivent dans la gamme : *do-ré*, *ré-mi*, *mi-fa*... Les tierces seront : *do-mi*, *ré-fa*, *mi-sol*, *fa-la*, *sol-si*...

Ainsi, l'intervalle *do-ré* est une seconde, et l'intervalle *ré-do* une septième. L'intervalle qui sépare deux notes du même nom, par exemple, *do-do*, s'appelle une octave. Une octave comporte 12 demi-tons.

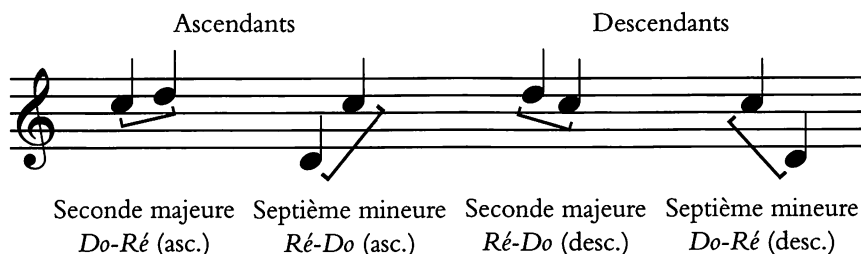


Notation musicale des intervalles inférieurs ou égaux à une octave.

Classification des intervalles

Les intervalles sont classés, selon le nombre de demi-tons qu'ils comportent, en intervalles majeurs, mineurs ou justes. Les deux notes de l'intervalle de seconde *do-ré* sont séparées par deux demi-tons, on l'appelle donc intervalle « de seconde majeure ». En revanche, les deux notes de l'intervalle de seconde *si-do* ne sont séparées que par un demi-ton. On l'appellera intervalle de « seconde mineure ». Tous les intervalles peuvent être mineurs ou majeurs, sauf ceux qui comportent cinq, six ou sept demi-tons. Celui de cinq demi-tons s'appelle « quarte juste », celui de sept, « quinte juste ». Il existe un cas particulier au milieu de l'octave *do-do* : le *fa*♯ se trouve à 6 demi-tons du *do* grave (quarte augmentée) et à six demi-tons du *do* aigu (quinte diminuée).

On appelle intervalle « mélodique » l'intervalle entre deux notes jouées l'une après l'autre. Il peut être « ascendant » ou « descendant ». Lorsqu'on désigne les intervalles, on doit leur adjoindre l'un ou l'autre de ces adjectifs : un intervalle *do-ré* ascendant est une seconde majeure ascendante ; un intervalle *do-ré* descendant est une septième majeure descendante. Un intervalle *ré-do* descendant est une seconde majeure descendante ; un intervalle *ré-do* ascendant est une septième majeure ascendante (en fonction du contexte, il est possible d'omettre les qualificatifs ascendant ou descendant).



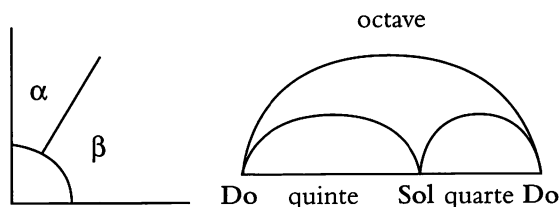
Toutes les combinaisons possibles des intervalles mélodiques entre deux notes.

Le tableau suivant résume le nombre de demi-tons des différents intervalles :

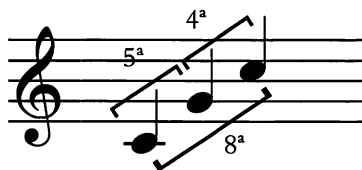
Intervalle	Nombre de demi-tons
unisson	0
seconde mineure	1
seconde majeure	2
tierce mineure	3
tierce majeure	4
quarte juste	5
quarte augmentée (quinte diminuée)	6
quinte juste	7
sixte mineure	8
sixte majeure	9
septième mineure	10
septième majeure	11
octave	12

Renversement d'intervalles

Le « renversement » d'un intervalle est l'intervalle qui le complète sur les douze demi-tons de l'octave. C'est un concept similaire à celui des angles complémentaires, illustré sur la figure suivante.



Le renversement de la quarte juste (cinq demi-tons) est la quinte juste (sept demi-tons) : sol-do (quarte juste) do-sol (quinte juste). L'angle complémentaire de l'angle α est l'angle β , qui le complète pour donner 90° .



Deux intervalles complémentaires.

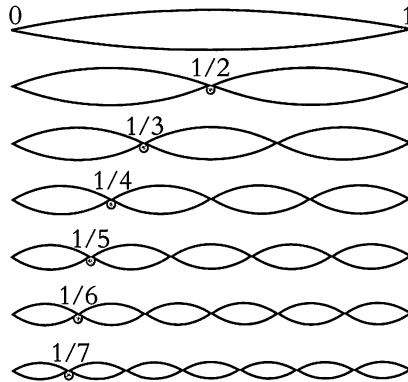
Le tableau suivant donne la relation entre un intervalle et son complémentaire.

Intervalle	Nombre de demi-tons		Renversement
unisson	0	12	octave
seconde mineure	1	11	septième majeure
seconde majeure	2	10	septième mineure
tierce mineure	3	9	sixte majeure
tierce majeure	4	8	sixte mineure
quarte juste	5	7	quinte juste
quinte diminuée (quarte augmentée)	6	6	quinte diminuée (quarte augmentée)
quinte juste	7	5	quarte juste
sixte mineure	8	4	tierce majeure
sixte majeure	9	3	tierce mineure
septième mineure	10	2	seconde majeure
septième majeure	11	1	seconde mineure
octave	12	0	unisson

Le phénomène des harmoniques

Quand un instrument de musique produit une note, même si celle-ci correspond à une fréquence objective F , l'oreille humaine la perçoit non comme une note « pure », mais comme la somme d'une infinité de composantes. Une corde qui vibre ne bouge pas de manière « ordonnée » d'un côté et de l'autre, mais plutôt de façon chaotique. Notre perception de la note produite par cette corde, ou de n'importe quelle autre note, est la somme d'une note principale et d'autres de moindre intensité, appelées « harmoniques ». Contrairement à la note que nous percevons, qui est un son composé, autant le composant principal que les harmoniques sont des notes pures. De toutes les harmoniques qui composent un son, l'oreille humaine perçoit jusqu'à la 16^e harmonique.

ANNEXE I



Ce schéma illustre comment une corde vibre aux fréquences correspondant aux premières harmoniques.

Dans le cas d'un instrument qui joue un *do*, la série des seize harmoniques que perçoit l'oreille humaine est la suivante :

Rang de l'harmonique	Intervalle	Fréquence	Note
1°	note fondamentale	33 Hz	Do ₁
2°	octave	66 Hz	Do ₂
3°	quinte	99 Hz	Sol ₂
4°	octave	132 Hz	Do ₃
5°	tierce majeure	165 Hz	Mi ₃
6°	quinte	198 Hz	Sol ₃
7°	pas d'intervalle tempéré	231 Hz	Sib ₃
8°	octave	264 Hz	Do ₄
9°	seconde majeure	297 Hz	Ré ₄
10°	tierce majeure	330 Hz	Mi ₄
11°	pas d'intervalle tempéré	363 Hz	Fa# ₄
12°	quinte juste	396 Hz	Sol ₄
13°	pas d'intervalle tempéré	429 Hz	La ₄
14°	pas d'intervalle tempéré	462 Hz	Sib ₄
15°	septième majeure	495 Hz	Si ₄
16°	octave	528 Hz	Do ₅

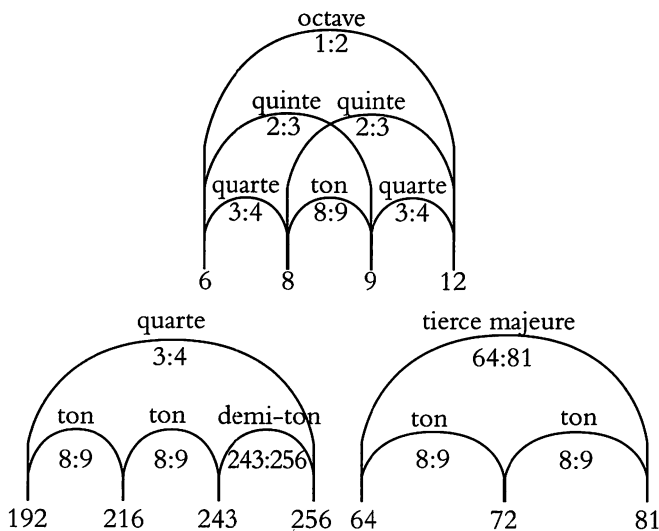
*Ce tableau présente les relations entre les harmoniques et la fréquence.
La 5^e harmonique, par exemple, correspond à un son dont la fréquence est cinq fois celle de la note fondamentale, 33 Hz, soit 165 Hz : $33 \times 5 = 165$.*

En notation musicale, les notes correspondant aux seize harmoniques sont les suivantes :



Consonance et dissonance

Au-delà de toute subjectivité, les sons produits simultanément peuvent être perçus soit comme agréables (on parle alors de « consonance »), soit comme désagréables (on dit alors qu'ils sont « dissonants »). Dans le premier chapitre, nous avons vu que l'école pythagoricienne considérait que la consonance de deux sons était directement liée à la proportion entre les longueurs des cordes qui émettaient les deux sons, soit, donc, le rapport de leurs fréquences. Selon les Pythagoriciens, l'octave (produit par deux cordes dont la proportion en longueur est de 1:2), la quinte (proportion 2:3) et la quarte (3:4) sont des intervalles consonants ; les autres, dérivés de ces trois intervalles de base, sont dissonants en raison des relations numériques complexes qui produisent leur son. Dans les dessins suivants sont définis les intervalles les plus importants et la proportion qu'ont entre elles les fréquences des notes correspondantes :

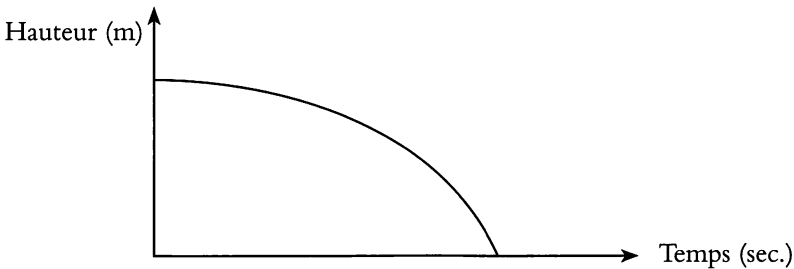


Parmi les nombreuses théories apparues depuis Pythagore, celle de l'« affinité sonore » est particulièrement intéressante. Selon cette théorie, le degré de consonance entre deux sons augmente avec le nombre des harmoniques communes.

Noter le temps

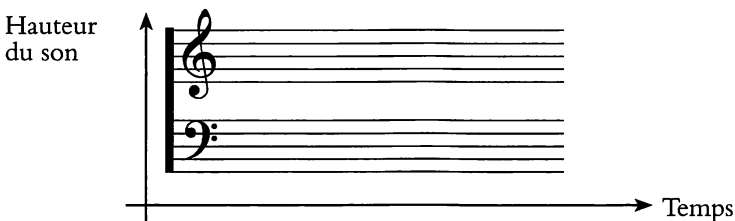
Les réflexions sur l'essence rythmique-même permirent de caractériser la manière dont les sons et les silences se succédaient. Cela rendit possible une représentation plus précise du phénomène musical.

En physique, le temps se représente habituellement sur un axe horizontal le long duquel le temps s'écoule de gauche à droite. Par exemple, pour représenter graphiquement la position d'un corps en chute libre, depuis le début de sa chute jusqu'au sol, on reporte la hauteur sur l'axe vertical (Y) et le temps, sur l'axe horizontal (X). La courbe obtenue a cette forme :



Graphe de la chute d'un corps.

On a adopté un système semblable pour représenter le temps en musique :



La lecture musicale se fait de gauche à droite, comme celle d'un texte en écriture occidentale. Les rythmes musicaux s'écrivent selon une séquence de notes sur un axe horizontal.

La musique et ses symboles

Pour comprendre le système d'écriture, il faut identifier les caractéristiques du « matériau » qu'elle représente. Ici, les sons et l'ensemble des symboles qui leur sont propres :

- En premier lieu, il faut considérer la présence ou l'absence de son. Le matériau est le son produit, mais c'est aussi le silence, l'absence de son.
- Les sons sont produits par un mouvement, ils ont un début et une fin.

Les notes et les silences sont les signes qui représentent, respectivement, la présence et l'absence de son. La représentation graphique indiquera également leur durée par rapport au reste des sons et des silences.

Les notes

Les notes de musique sont un code qui indique la durée du son qu'elles représentent. Elles sont constituées :

- d'une tête : petit ovale blanc ou noir.
- d'une hampe, ou queue, qui est un segment vertical qui relie la tête et le crochet, s'il existe.
- d'un ou plusieurs crochets, qui sont des lignes recourbées, situées de l'autre côté de la tête par rapport à la hampe.



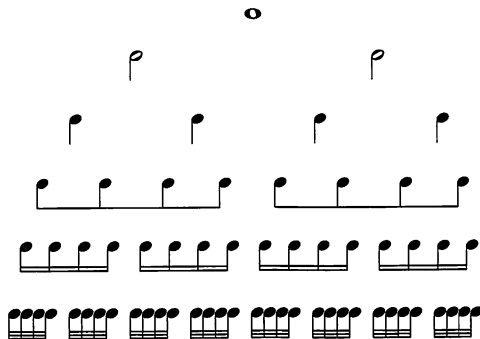
Durées relatives des notes

Comparés entre eux, les sons et les silences ont une « durée relative », indépendamment de la vitesse d'exécution de la pièce musicale. La vitesse d'exécution, et donc la « durée réelle » des notes, est définie par une indication métronomique et on a l'habitude d'utiliser pour cela un « métronome », un appareil mécanique (ou électronique) à vitesse réglable mais constante.

Comme on l'a déjà mentionné, la durée relative des notes est déterminée par l'aspect des têtes (noire ou blanche) et la présence ou l'absence de hampes et de crochets.

Ainsi, la ronde et la blanche ont la tête blanche, tandis que pour toutes les autres notes, les têtes sont noires. Elles ont toutes des hampes, sauf la ronde. La croche a un crochet, la double-croche, deux, la triple-croche, trois, et la quadruple-croche, quatre. On attribue à chacune d'entre elles une durée relative, donnée par le nombre 2^n , où n est compris entre 0 et 6.

Dans l'ordre décroissant de la durée relative, on trouve : la ronde, la blanche, la noire, la croche, la double-croche, la triple-croche et la quadruple-croche. La note de base est la ronde et on lui attribue la valeur 1. La blanche dure la moitié d'une ronde, c'est-à-dire que le temps d'une ronde, on peut jouer deux blanches. Pendant l'exécution d'une blanche, on peut jouer deux noires. En général, la durée d'une note est la moitié de celle de la précédente. La figure suivante montre les durées relatives des différentes notes, la ronde étant en haut de la pyramide et les quadruples croches à la base de celle-ci :

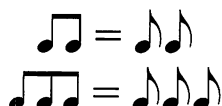


Le tableau suivant résume les durées relatives de chacune des notes :

N	2^n	Nom	Note	Durée relative à la ronde
0	1	Ronde	○	1
1	2	Blanche	⏏	1/2
2	4	Noire	⏏	1/4
3	8	Croche	⏏	1/8
4	16	Double-croche	⏏	1/16
5	32	Triple-croche	⏏	1/32
6	64	Quadruple-croche	⏏	1/64

Le nombre caractérisant chaque note correspond au nombre de fois qu'elle peut être jouée dans le même temps qu'une ronde. La relation entre les durées des notes est directe et transitive : si une blanche vaut deux noires et qu'une noire vaut quatre doubles-croches, alors une blanche vaut huit doubles-croches.

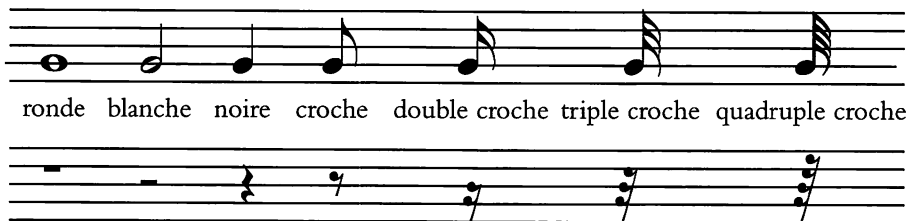
On a l'habitude de lier les notes avec crochets par un trait qui réunit les hampes, selon des groupes qui correspondent à des notes supérieures en durée ou en fonction du rythme, comme on peut le voir ci-dessous :



Les silences

Le silence complète le son et c'est le deuxième élément fondamental de la musique. On pourrait penser que c'est une base sur laquelle on joue une note, mais dans le domaine musical, le silence est considéré comme un laps de temps pendant lequel on ne joue aucune note. Il est donc nécessaire de donner une durée exacte au silence. Pour représenter des silences de durées différentes, on utilise des signes spéciaux qui équivalent aux notes :

Notes



Silences

Points de prolongation

Il est souvent nécessaire d'augmenter la durée relative d'une note ou d'un silence. On le fait au moyen d'un petit point, à la droite de la tête de la note, simplement appelé « point ». Sa présence indique que la durée relative de la note doit être augmentée de 50 %. Ainsi, une noire « pointée » vaut une noire plus la moitié

d'une noire, soit une croche. La noire équivaut à $1/4$, la croche à la moitié, soit $1/8$; la noire pointée correspond donc à $1/4 + 1/8 = 3/8$, soit trois croches.

Il existe aussi le « double point », qui indique que la durée de la note doit être prolongée de 75 %. Dans le cas d'une blanche, par exemple, le premier point augmente sa durée d'une noire et le second d'une croche. Dans le cas d'une noire, le point augmente sa valeur d'une durée équivalente à une croche et le double point, d'une double-croche :

$$d. = d \text{ — } d$$

$$d.. = d \text{ — } d \text{ — } d$$

$$c. = c \text{ — } c$$

$$c.. = c \text{ — } c \text{ — } c$$

Annexe II

Retour sur le rôle du temps en musique

*La musique nous a été donnée uniquement pour ordonner les choses,
entre autres et en particulier, le rapport de l'homme au temps.*

Igor Stravinsky

La perception du temps est la source de toute musique et de tout rythme.

Olivier Messiaen

Nous vivons l'instant, nous sommes présents. Tout est présent. Nous ne connaissons que le passé et le présent : le présent a été, tout au plus, dans le passé. Peut-être que le présent dépend d'une certaine manière du passé, mais il ne s'anticipe jamais.

Nous pouvons prendre de la distance et regarder une maison en perspective, ou regarder le chemin au loin, mais le temps nous piège : nous ne pouvons pas prendre de « distance » par rapport au temps, nous ne pouvons pas le retenir pour penser ou se reposer. Pourtant, l'humanité a été capable de vivre les processus temporels. La méthode est simple : on planifie un événement dans le futur, on attend qu'il arrive au présent et on l'enregistre à ce moment. Un instant après, il appartient au passé... Et reste enregistré dans la mémoire.

En musique, il se passe la même chose : elle résonne au présent et se complète dans la mémoire. La musique est imprégnée de temps, consciemment ou inconsciemment.

Modalité et tonalité

Il existe au moins deux styles, ou modes, pour écouter de la musique : le « modal » et le « tonal ». Ce qui les différencie surtout est leur mode de développement dans le temps.

La musique la plus répandue dans le monde occidental est tonale. Ce style se développa pendant la période baroque, entre les années 1600 et 1750 environ,

et il se caractérise par sa projection « vers l'avant », vers le futur. À chaque moment du discours musical d'une œuvre tonale, un accord conduit en général au suivant. Les tensions harmoniques tendent à se résoudre dans un moment de calme. On appelle « fonction de l'accord » le rôle que joue l'accord dans cet enchaînement de tensions et de repos.

À partir de la période baroque, le système tonal connut un processus de changement permanent en traversant les périodes suivantes du classicisme et du romantisme. Si le tonalisme continua à dominer la majeure partie de la musique composée en Occident, on commença à s'en écarter dans les milieux d'avant-garde de la musique savante du début du ^{xx}e siècle, pour aller vers un style sans tensions harmoniques, appelé style « atonal » ou « modal ».

Dans le style modal, le temps a été interprété de deux manières différentes : d'une part, comme « éternité », dont l'exemple le plus connu est le chant grégorien de l'Europe médiévale, où n'existent pas les notions de passé, présent ou futur, et où, par conséquent, le temps n'existe pas. L'autre conception est celle qui considère le temps comme un « présent continu » : l'événement sonore est complété à chaque instant, sans besoin d'être conditionné par l'instant précédent, ni de conditionner le suivant. C'est le présent qui importe seulement. En plus de la musique savante d'avant-garde, une bonne partie de la musique orientale, certains folklores latino-américains ou le jazz be-bop répondent à cette logique.

La relation particulière au temps qu'entretiennent les styles modal ou tonal peut être retrouvée dans d'autres disciplines artistiques : la musique tonale, vers l'avant, peut être comparée à la danse et la musique modale, à la poésie.

Bibliographie

- ALLOUCHE, J.-P. et MAILLARD-TEYSSIER, L., *Mathématiques, musique et émotion*, Math. & Sci. hum. / Mathematical Social Sciences, 45^e année, n° 178, 2007(2), p. 119-124.
- ASSAYAG, G., FEICHTINGER, H.G., RODRIGUES, J.F. (éditeurs) : *Mathematics and Music*, Berlin, Springer, 2002.
- ASSAYAG, G., MAZZOLA, G. et NICOLAS, F., *Penser la musique avec les mathématiques ?*, Delatour, 2006.
- BAILHACHE, P., *Deux mathématiciens musiciens : Euler et d'Alembert*, Physis, vol. XXXII, Nuova Serie, fasc. 1, 1995, p. 1-35.
- BAILHACHE, P., *Leibniz et la Théorie de la musique*, Klincksieck, « Domaine musicologique », 1992.
- BAILHACHE, P., *D'Alembert théoricien de la musique : empirisme et nature*, à consulter sur patrice.bailhache.free.fr.
- BAILHACHE, P., *La musique traduite en mathématiques : Leonhard Euler*, à consulter sur patrice.bailhache.free.fr.
- BAILHACHE, P., Antonia Soulez, Céline Vautrin, Helmholtz du son à la musique, Vrin, « Mathesis », 2011.
- BAILHACHE, P., *La Musique, une pratique cachée de l'arithmétique ?*, à consulter sur patrice.bailhache.free.fr.
- BROUÉ, M., *Les tonalités musicales vues par un mathématicien*, Le Temps des savoirs, Revue de l'Institut Universitaire de France, 4, D. Rousseau & M. Morvan eds., Odile Jacob, Paris, 2002.
- CARTIER, P., *L'Ouvrage d'Euler sur la théorie musicale (1739) : les principaux apports théoriques*, conférence disponible à l'adresse, à consulter sur www.diffusion.ens.fr
- DARRIGOL, O., *The Acoustic Origins of Harmonic Analysis*, Archive for History of Exact Sciences, vol. 61, n° 4, 2007, p. 343-424.
- DECREUX, É., *Mathématiques, sciences et musique*, Ellipses, 2008.
- ESCAL, F., « Musique et science : d'Alembert contre Rameau », International Review of the Aesthetics and Sociology of Music 14, 1983, p. 167-190.
- HOFSTADTER, D.R., *Gödel, Escher, Bach : les brins d'une guirlande éternelle*, Paris, Dunod, 2008.
- KOLNEDER, W., J.S. Bach, *Lebensbilder*, Cologne, Bastei Lübbe, 1984.
- LOY, G., *Musimathics*, Londres, The MIT Press, 2006.
- MAZZOLA, G., *The Topos of Music : Geometric Logic of Concepts, Theory, and Performance*, Birkhäuser, 2003.
- SAMUEL, C., *Panorama de l'art musical contemporain*, Paris, Gallimard, 1962.

Index analytique

- accent 46, 52, 61
- accord 16-32, 34, 37, 122
 - naturel 27, 28
 - pythagoricien 14-16
- accords 94, 104, 133, 134, 158
- aigu 16, 63, 64, 106, 145, 146
- algorithme 119, 142, 144
- amalgame 56
- Ars Nova* 41, 42, 45
- atonal 123, 124, 158
- audio numérique 114-116, 118

- Bach, Jean-Sébastien 49, 76, 88-90, 94, 99
- beauté 14, 103, 104
- Beethoven, Ludwig van 58, 76, 78, 117, 138
- Bel 107
- Berg, Alban 101, 123, 125, 132-133
- binaire 40, 42-45, 47, 60, 98
- bit 105-122

- canon 48-51, 73-77, 85, 88-90
- canon rythmique 48, 56
- cent 33-34
- cercle des quintes 24, 26, 133
- chaînes de Markov 139-140
- clés 61, 67-69, 89
- combinatoire, procédé 54, 137
- comma pythagoricien 26, 27, 31
- consonance et dissonance 150
- cryptogramme 101

- dés de Mozart 136-138, 142
- dodécaphonisme 123-135

- Edison, Thomas Alva 114
- EMI (Experiments in Musical Intelligence) 142
- exponentielle-linéaire, croissance 19

- Fibonacci 101-104
- fonction sinus 106
- forme 97-100, 127-132
- fractions 16, 27, 60, 61
- fréquence 16-35, 39, 64-66, 105-115, 145, 148-150

- gamme 15, 31, 33, 62, 68-69
 - chromatique 24, 27, 36
 - diatonique 28-30, 40
 - pythagoricienne 22-24, 27, 28, 33, 36
 - symétrique 95-97
 - tempérée 31-34, 37, 122
- grave 16, 17, 19, 106, 145
- Guido d'Arezzo 23

- harmonie 13, 15, 27, 34, 40
- harmoniques 16, 109-113, 123, 148-151
- hauteur 16, 64-73, 106, 127, 145, 151

- intervalles 16, 18-22, 27-33, 85, 145-148
- inversion 49, 73, 79, 80-88, 126-128, 131

- mélodie 39, 49, 63, 70-76, 79-94, 139-143
- Messiaen, Olivier 39, 95, 157
- mesure 44, 45, 52-62, 74-78, 136-138
- mesure esthétique 104

- métronomie 57-59, 91, 152
- MIDI 120-122
- modal 157, 158
- mode 43, 44
- monocorde 14
- moyenne 36
- Mozart, Amadeus 83, 103, 136, 142
- musique
 - des sphères 13
 - sérielle 133-134, 135
 - stochastique 135
- neumatique 40, 42, 43
- Nombre d'or 101-104
- nombres
 - de Fibonacci 103, 104
 - entiers 34, 35, 36, 37
 - fractionnaires 60
 - irrationnels 35, 37
 - naturels 36
 - premiers 18, 27
 - rationnels 36, 37
- notation musicale 40, 61, 145, 146, 150
 - alphabétique 23
 - arabe 101
 - moderne 11, 41, 43, 47, 61-62
 - notes proportionnelles 40-46
- ondes 105-122
- oreille absolue 20
- partition 46, 57, 61-64, 70, 71, 120, 122, 127
- pavage 48, 51
- percussion 46-51, 56, 58, 103
- plus petit commun multiple 60
- polyrythmie 56-60
- prolatio 43-45
- proportion 19, 36, 42-44, 91, 150
- Pythagore 16, 36, 37
- quadrivium 14
- quantification 122
- quinte du loup 26, 28, 30
- réflexion 73, 78-89
- renversement d'intervalles 147-148
- résonance 17
- rotation 73, 83-85, 126, 129, 132
- rythme 39-51, 53-56, 60-62, 64-71, 151
- Schönberg, Arnold 63, 101, 123, 124, 125, 129
- séries 125-128
- symboles musicaux 24, 40, 43, 47, 60, 152-155
- symétries 68, 85, 86, 94-97
- synthèse acoustique 113
- tempéraments 30, 31, 33, 136
- tempus 43-45
- temps 39-66, 72-75, 106, 110, 151-154, 157-158
- ternaire 40, 42-45, 53, 54, 55, 59, 60
- timbre 106, 109, 110, 112, 113
- tonal 29, 30, 85, 123-135, 157-158
- transformations géométriques 72, 101
- transformations homothétiques 90-92
- translation 73-75, 85-88, 93
- Vitry, Philippe de 41, 42, 45
- Webern, Anton 84, 85, 101, 131
- Xenakis, Iannis 135

Remerciements :

à Cédric Villani et à toute l'équipe de l'Institut Henri Poincaré ; à Étienne Ghys et à toute l'équipe de *Images des mathématiques* ; à Hervé Lavergne, Pascale Sensarric, Hervé Morin et Sabine Gude du journal *Le Monde*.

Collection "Le monde est mathématique"

Titre original : "El mundo es matemático",

Éditée en langue espagnole.

© 2010, Javier Arbonés et Pablo Milrud pour le texte

© 2013 RBA Contenidos Editoriales y Audiovisuales S.A.U.

Édité par RBA France, SARL

105, avenue Raymond-Poincaré

75016 Paris

R.C.S. Paris 533 671 095

Gérant : Enrique Iglesias

Directeur de la publication : Frédéric Hosteins

Responsable marketing : Sophie Thouvenin

Responsable éditoriale : Clélia Fortier-Kriegel

Graphisme couverture : Manon Bucciarelli

Graphisme intérieur : Babel, disseny i maquetació, S.L ; version française : Nord Compo

Crédits photographiques : Age-Fotostock : 15, 121 ; Album akg : 90 ; Album oronoz : 58 ;

Archives RBA : 23, 34, 51, 117 ; Chœur de la OFGC : 20 ; Helsinki University Library : 42

Traduit de l'espagnol par : Youssef Halaoua, Maguy Ly, Laurence Moinereau

Adaptation : Vianney Aubert, Charles-Optal Dorget

Adaptation éditoriale : Cobra SAS

Le Code de la propriété intellectuelle et artistique n'autorisant, aux termes de l'Article L.122-5 alinéa 2 et 3, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (Article L. 122-4). Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les Articles 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

Tous droits réservés

DIFFUSION EN KIOSQUE

Service des ventes France :

PROMÉVENTE

(réservé aux dépositaires de presse)

Pour la Belgique :

AMP - 1, rue de la Petite-Île - 1070 Bruxelles

Pour la Suisse :

Naville - 38-42, avenue Vibert - CH 1227 Carouge - GE

Tel : (022) 308 04 44

Pour le Québec :

Express Mag

8155 rue Larrey

Anjou

QCH1J2L5

SERVICE CLIENTS (France)

Le Monde est mathématique

90, boulevard National

92258 La Garenne Colombes Cedex

Tél. : 01 75 43 31 80 (prix d'un appel national)

L'éditeur se réserve le droit d'interrompre la publication en cas de mévente.

ISBN Collection : 978-2-8237-0099-2

ISBN : 978-2-8237-0109-8

Dépôt légal : à parution

Imprimé et relié par CAYFOSA - Barcelone, Espagne

Achevé d'imprimer : mai 2013.

L'HARMONIE EST NUMÉRIQUE

MUSIQUE ET MATHÉMATIQUES

PAR JAVIER ARBONÉS ET PABLO MILRUD,
AVEC UNE PRÉFACE DE SYLVIE BENZONI-GAVAGE

Saviez-vous que, comme le découvrit Pythagore il y a plus de 2000 ans, la proportion harmonique gouverne les intervalles musicaux ? Que Mozart, inaugurant la musique aléatoire, inventa une méthode pour composer une valse en se servant de dés ? Ou qu'à l'origine même de tout son se retrouvent quatre grandes variables : durée, intensité, hauteur et timbre ? C'est au fond une caractéristique bien particulière de l'art musical que d'entretenir des relations étroites avec les mathématiques. En ce début de xxi^e siècle, avec le développement de l'électronique et l'avènement des bits et des bytes, la frontière séparant musique et mathématiques se fait chaque jour plus ténue. Bien souvent en fusion avec l'informatique, la musique contemporaine suppose une arithmétique sous-jacente dont nous avons aujourd'hui pleinement conscience. Mais l'histoire ne dit pas s'il existe, pour autant, une formule de la magie musicale.

« Je vous invite à nous suivre dans
l'exploration de ce monde mathématique qui
n'est autre que notre monde à tous ».

Cédric Villani